Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2024

Заключительный этап   7 апреля

11 класс

Задача 11.1. Последовательность натуральных чисел a_0, a_1, a_2, $\ldots$ определяется следующими соотношениями: $a_0 = 1$, $a_n = kn + (-1)^n a_{n-1}$, где k — фиксированное натуральное число. Сколько существует таких последовательностей, в которых встречается число 2024?

Ответ: 7.

Решение. Докажем, что для любого целого $m \geqslant 0$ справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} &a_{4m} = 4mk + 1, \\ &a_{4m+1} = k - 1, \\ &a_{4m+2} = (4m+3)k - 1, \\ &a_{4m+3} = 1. \end{aligned}$$

Будем доказывать эти формулы индукцией по m. База $m = 0$ проверяется непосредственно. Предположим, что формулы справедливы для всех чисел, не больших $m-1$, и докажем эти формулы для числа m. Поскольку по предположению индукции $a_{4m-1} = 1$, последовательно получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} a_{4m} &= k \cdot (4m) + (-1)^{4m} a_{4m-1} = 4mk + 1, \\ a_{4m+1} &= k(4m+1) + (-1)^{4m+1} a_{4m} = (4km + k) - (4mk + 1) = k - 1, \\ a_{4m+2} &= k(4m+2) + (-1)^{4m+2} a_{4m+1} = (4km + 2k) + (k - 1) = (4m+3)k - 1, \\ a_{4m+3} &= k(4m+3) + (-1)^{4m+3} a_{4m+2} = (4km + 3k) - (4km + 3k - 1) = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, наши формулы доказаны.

Теперь, используя эти формулы, посмотрим, какие члены нашей последовательности могут равняться 2024. Ясно, что числа вида a_{4m} и a_{4m+3} не могут равняться 2024: числа вида a_{4m} нечётны, а числа вида a_{4m+3} равны 1. Далее, числа вида a_{4m+1} могут равняться 2024 только при $k = 2025$, что дает нам один пример последовательности.

Наконец, предположим, что для некоторого целого неотрицательного m число a_{4m+2} равно 2024. Мы получаем следующее уравнение: $(4m+3)k = 2025$. Заметим, что сомножитель $4m+3$ дает остаток 3 при делении на 4, а число 2025 дает остаток 1 при делении на 4. Значит, число k, во-первых, должно быть делителем числа 2025, а во-вторых, должно иметь остаток 3 при делении на 4 (т.к. $3 \cdot 3 \equiv 1 \pmod 4$). Поскольку $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, число k имеет вид $3^\alpha \cdot 5^\beta$, где $\alpha \in \{0,1,2,3,4\}$ и $\beta \in \{0,1,2\}$. Для того, чтобы число k такого вида давало бы остаток 3 при делении на 4, необходимо и достаточно, чтобы степень α была бы нечетной (поскольку $5 \equiv 1 \pmod 4$ и $3^\alpha \equiv 4(-1)^\alpha \pmod 4$). Получаем ещё 6 возможных значений k: 3, $3 \cdot 5$, $3 \cdot 5^2$, 3^3, $3^3 \cdot 5$, $3^3 \cdot 5^2$. Вместе с вариантом $k = 2025$ получаем 7 возможных последовательностей.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Доказано, что число k может быть делителем числа 2025, дающим остаток 3 при делении на 4, но окончательный ответ неверен из-за пропущенного случая или вычислительной ошибки.
- 3 б. Методом математической индукции доказаны формулы для элементов последовательности, дальнейших продвижений нет.
- 1 б. Обоснованно получен ответ $k = 2025$.

Задача 11.2. На доске написано 20-буквенное слово, состоящее только из букв A и B. Назовем *крутизной* слова количество способов стереть некоторые его буквы так, чтобы на доске остались четыре буквы, образующих комбинацию ABBA. Например, слово ABBAAB имеет крутизну 2, поскольку нужную комбинацию можно получить двумя способами: **ABBA**AB и **ABB**A**A**B. Какова наибольшая возможная крутизна слова, выписанного на доске?

Ответ: $5^2 \cdot C_{10}^2 = 1125$.

Решение. Возьмем произвольное слово длины 20 и будем последовательно передвигать в нем буквы A, не уменьшая при этом крутизну слова. Ясно, что в нашем слове должно быть хотя бы две буквы B, иначе крутизна слова равна 0. Далее, предположим, что в слове между двумя буквами B есть буква A, т.е. слово имеет вид ...B...**A**...B ...Посмотрим, с какой стороны от буквы **A** больше букв A, и передвинем выделенную букву **A** в тот конец слова, где их меньше. Заметим, что при таком перемещении буквы **A** мы могли разрушить лишь слова вида **A**BBA и ABB**A**, которые давали вклад в размер крутизны исходного слова. Предположим, что мы переместили букву **K** налево. Тогда слова вида **A**BBA сохранились, а вместо слов вида ABB**A**, образованных буквой B слева от **A** и двух букв B и буквы **A**, мы получим как минимум столько же слов, которые образуются из нашей передвинутой буквы **А**, двух любых букв У и любой буквы А, которая стояла в исходном слове справа от буквы **А**.

Получается, что мы можем рассматривать только слова вида А...АВ...ВА...А. Если в левом блоке будет ℓ букв А, а в правом — r букв А, то крутизна такого слова равна $\ell r \cdot C^2_{20-(\ell+r)}$.

Заметим, что при фиксированной сумме $\ell+r$ произведение ℓr будет максимальным, если числа ℓ и r отличаются не больше чем на 1: в противном случае, если, например, $\ell \geqslant r+2$, то переместим одну букву К из левого блока в правый, и крутизна изменится на

$$(\ell-1)(r+1)C^2_{20-(\ell+r)} - \ell r C^2_{20-(\ell+r)} = (\ell-r-1)C^2_{20-(\ell+r)} > 0.$$

Таким образом, можно считать, что $r=\ell$ или $r=\ell-1$, причем $1 \leqslant \ell \leqslant 9$ (иначе в нашем слове не будет или букв А, или букв В).

Теперь возьмем слово, в котором $r=\ell-1$, и заменим последнюю букву В на букву А. При такой замене крутизна слова изменится на величину

$$\ell^2 C^2_{20-2\ell} - \ell(\ell-1)C^2_{20-(2\ell-1)} = \ell(10-\ell)(21-4\ell).$$

Значит, при $\ell \leqslant 5$ крутизна слова после такой замены увеличивается, а при $\ell > 5$ — уменьшается.

Аналогично, посмотрим, что произойдёт, если в слове, в котором $r=\ell$, заменить первую букву В на букву А:

$$\ell(\ell+1)C^2_{20-(2\ell+1)} - \ell^2 C^2_{20-2\ell} = \ell(19-2\ell)(9-2\ell).$$

Получается, что при $\ell < 5$ крутизна слова после такой замены увеличивается, а при $\ell \geqslant 5$ — уменьшается.

Значит, мы можем последовательно совершать такие замены, сводя величину ℓ к значению 5 и увеличивая в процессе крутизну. В итоге, наибольшая крутизна будет у слова, в котором $\ell=r=5$, и равна она $5^2 \cdot C^2_{10}$.

Замечание. Последнюю часть решения можно провести по-другому. А именно, рассмотрим крутизну слова, в котором $r=\ell$, как функцию от ℓ: $S(\ell) = \ell^2 C^2_{20-2\ell}$. Вычислим ее производную: $S'(\ell) = \ell(8\ell^2 - 117\ell + 380)$. Нас интересует натуральная точка из отрезка $[1;9]$, которая наиболее близка к нулю ℓ_0 этой производной. Поскольку $4{,}5 < \ell_0 < 5$, в качестве такой точки необходимо выбрать число $\ell=5$, что и приводит нас к примеру. Аналогичные вычисления для случая $r=\ell-1$ также дают значение $\ell=5$, но крутизна такого слова оказывается меньше.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Не рассмотрен случай, когда размеры блоков отличаются на 1, но для равных блоков обоснованно получен верный ответ.
- 4 б. Задача обоснованно сведена к случаю, когда слово имеет вид А...АВ...ВА...А, причем размеры крайних блоков отличаются не более чем на 1.
- 2 б. Задача обоснованно сведена к случаю, когда слово имеет вид А...АВ...ВА...А, но дальнейшие рассуждения неверны или отсутствуют.
- 1 б. Приведен верный пример и получено верное численное значение максимальной крутизны числа.

Задача 11.3. Аня и Боря играют в игру. Они по очереди (начинает Аня) выписывают по одной цифре, пока не получится шестизначное число. При этом первая выписанная цифра ненулевая и все выписанные цифры различны. Аня выигрывает, если полученное шестизначное число делится хотя бы на одно из чисел: 2, 3 или 5. Если этого не случается, то выигрывает Боря. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ: Аня.

Решение. Пусть $\overline{a_1b_1a_2b_2a_3b_3}$ — итоговое шестизначное число. Пусть также $A = \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$ и $B = \{1, 3, 7, 9\}$. Заметим, что если Боря своим третьим ходом поставит цифру из множества A, Аня выиграет, поскольку полученное число будет делиться на 2. Значит, $b_3 \in B$.

Пусть Аня первым ходом выберет цифру $a_1 = 3$, а вторым ходом — цифру $a_2 = 9$. Если Боря на первом или втором ходу выберет цифру из множества B, то своим третьим ходом Аня заберет последнюю оставшуюся цифру из множества B, и Боря вынужден будет взять свою цифру b_3 из A, что приведет к его проигрышу. Значит, Боря вынужден взять первые две свои цифры b_1 и b_2 взяты из множества A. Заметим, что Боря вынужден будет на последнем ходе выбрать либо цифру 1, либо цифру 7, которые дают одинаковый остаток 1 при делении на 3. Поэтому Ане достаточно подобрать цифру a_3 так, чтобы сумма цифр $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3$ давала бы остаток 2 при делении на 3. Поскольку $a_1 = 3$ и $a_2 = 9$ не влияют на остаток этой суммы, все зависит от остатка суммы $b_1 + b_2$. Покажем, как действовать Ане в каждом из случаев.

Если b_1+b_2 делится на 3, то Аня выберет цифру a_3 из набора $\{2, 5, 8\}$: поскольку до этого момента эти цифры мог выбирать только Боря, как минимум одна из этих трех цифр останется не выбранной.

Если $b_1 + b_2$ дает остаток 1 при делении на 3, Аня выберет цифру $a_3 = 1$. Как мы помним, Боря не мог ее выбрать на первых двух ходах.

Наконец, если b_1+b_2 дает остаток 2 при делении на 3, Аня выберет цифру a_3 из набора $\{0, 6\}$. Боря не мог выбрать обе эти цифры, поскольку тогда $b_1 + b_2 = 6$, а мы предположили, что $b_1 + b_2$ дает остаток 2 при делении на 3.

Таким образом, Аня выиграет.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Приведена верная стратегия для первых двух ходов Ани, но в один из случае для последнего хода разобран неверно или не разобран.
- 3 б. Приведена верная стратегия для первых двух ходов Ани, но последний ход разобран неверно или не разобран.
- 0 б. Только ответ.

Задача 11.4. По плоскости ползут три улитки. Каждая улитка движется со своей скоростью прямолинейно и равномерно. Известно, что в некоторые три момента времени все улитки оказывались на одной прямой. Могут ли улитки в какой-то момент времени оказаться в вершинах правильного треугольника?

Ответ: Нет, не могут.

Решение. Введем декартову систему координат, и пусть $(x_i(t); y_i(t))$, $i = 1, 2, 3$ — координаты i-й улитки в момент времени t. Поскольку улитки движутся прямолинейно и равномерно, то $x_i(t)$ и $y_i(t)$ — линейные функции от времени t. Рассмотрим векторы

$$\overline{a}(t) = (x_2(t) - x_1(t); y_2(t) - y_1(t)),$$

$$\overline{b}(t) = (x_3(t) - x_1(t); y_3(t) - y_1(t)),$$

направленные от первой улитки ко второй и третьей соответственно. Тогда условие принадлежности трех улиток одной прямой равносильно коллинеарности векторов $\overline{a}(t)$ и $\overline{b}(t)$.

Это в свою очередь равносильно пропорциональности координат этих векторов:

$$(x_2(t) - x_1(t))(y_3(t) - y_1(t)) = (x_3(t) - x_1(t))(y_2(t) - y_1(t)).$$

Заметим, что это равенство представляет собой уравнение на переменную t степени не выше 2. Нам известно, что у этого уравнения есть три различных корня. Но тогда это уравнение имеет тривиальный вид $0 = 0$, поскольку в противном случае у него не может быть больше двух корней. Значит, это уравнение справедливо при любом t, и улитки всегда находятся на одной прямой и не могут оказаться в вершинах ни одного треугольника.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 4 б. Правильно написано условие коллинеарности векторов $\overline{a}(t)$ и $\overline{b}(t)$.
- 0 б. Только ответ.

Задача 11.5. В пирамиде $SABCD$ с вершиной S известно, что $AB = 9$, $BC = 5$ и $CD = 13$. Найдите длину ребра AD, если вписанная в пирамиду сфера касается основания в точке пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

Ответ: 15.

Решение. Обозначим точки касания сферы с гранью основания и гранями SAB, SBC, SCD и SDA буквами H, K_1, K_2, K_3 и K_4 соответственно.

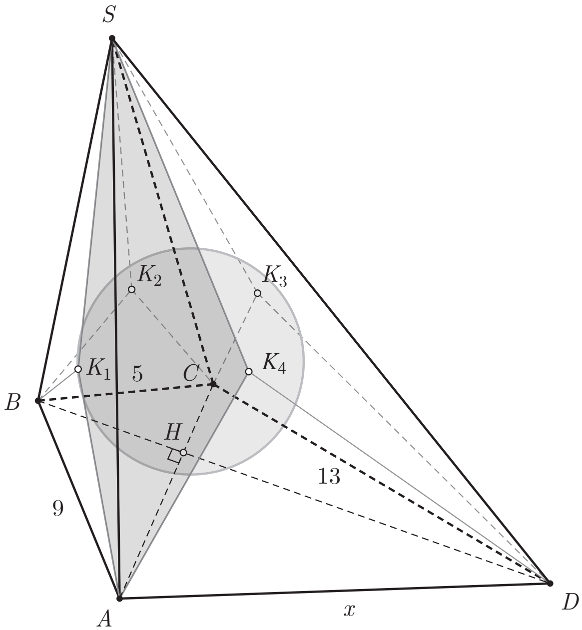
По свойству отрезков касательных, соответствующие отрезки касательных к сфере будут равны. Значит, по признаку равенства по трём сторонам будут равны треугольники

$$\begin{gathered}\triangle K_1AB = \triangle HAB,\\ \triangle K_2BC = \triangle HBC,\\ \triangle K_3CD = \triangle HCD,\\ \triangle K_4DA = \triangle HDA,\end{gathered}$$

а также

$$\begin{gathered}\triangle K_1SB = \triangle K_2SB,\\ \triangle K_2SC = \triangle K_3SC,\\ \triangle K_3SD = \triangle K_4SD,\\ \triangle K_4SA = \triangle K_1SA.\end{gathered}$$

Следовательно, будут равны все соответствующие углы этих треугольников.



Поскольку вертикальные углы между диагоналями $ABCD$ равны, то будут равны углы $\angle AK_1B = \angle CK_3D$ и $\angle BK_2C = \angle DK_4A$.

Рассматривая суммы углов 360° вокруг точек K_1, K_2, K_3 и K_4 получаем, что все углы равны:

$$\angle AK_1B = \angle BK_2C = \angle CK_3D = \angle DK_4A.$$

Так как эти же углы получаются между диагоналями в основании $ABCD$ и образуют вокруг точки H в сумме 360°, то углы прямые и диагонали AC и BD перпендикулярны.

Обозначим длины отрезков AH, BH, CH и DH за a, b, c и d соответственно. Применяя теорему Пифагора для треугольников ABH, BHC и CHD получим равенства:

$$a^2 + b^2 = 9^2,$$
$$b^2 + c^2 = 5^2,$$
$$c^2 + d^2 = 13^2.$$

Складывая первое и третье и вычитая второе равенство, получим $d^2 + a^2 = 13^2 + 9^2 - 5^2 = 15^2$. Из теоремы Пифагора для треугольника DAH находим отрезок $AD = 15$.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Верно доказано, что диагонали основания пирамиды перпендикулярны, но не получен правильный ответ.
- 2 б. Отмечены пары равных треугольников с вершинами в точках касания сферы с гранями, но не сделан вывод о перпендикулярности диагоналей основания.
- 1 б. Получен верный ответ, но не доказано, что угол между диагоналями четырехугольника прямой.

Задача 11.6. На координатной плоскости Oxy рассматривается угол, образованный прямыми $y = x$ и $y = -2x$, целиком лежащий в полуплоскости $y \geqslant 0$. Среди всех парабол вида $y = ax^2 + bx + c$, каждая точка которых находится внутри этого угла либо на его границе, найдите ту параболу, которая принимает наименьшее значение в точке $x = 2$.

Ответ: $y = \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Решение.

Рассмотрим случай, когда искомая парабола $y = ax^2 + bx + c$ вписана в данный угол, т.е. касается обеих прямых $y = x$ и $y = -2x$. Касание с прямой $y = x$ означает, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = x$ имеет единственное решение, т.е. дискриминант D_1 этого квадратного уравнения равен 0. Запишем это условие: $D_1 = (b-1)^2 - 4ac = 0$.

Аналогично, касание с прямой $y = -2x$ означает, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = -2x$ имеет единственное решение, поэтому дискриминант D_2 этого квадратного уравнения также равен 0: $D_2 = (b+2)^2 - 4ac = 0$.

Из этих двух равенств следует, что $(b-1)^2 = (b+2)^2$, поскольку оба этих выражения равны $4ac$. Решая это уравнение относительно b, получаем $b = -\frac{1}{2}$.

Подставим это значение b в формулу для D_1 и найдем $ac = \frac{9}{16}$.

Подставим в уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$ значения $x = 2$ и $b = -\frac{1}{2}$: получается выражение $4a + c - 1$, которое мы хотим минимизировать при условии $ac = \dfrac{9}{16}$. Заметим, что $a > 0$, поскольку парабола лежит в верхней полуплоскости относительно оси Ox, а значит, и $c > 0$. Поэтому мы можем применить неравенство Коши: $4a + c \geqslant 2\sqrt{4ac} = 3$, откуда $4a + c - 1 \geqslant 3 - 1 = 2$.

Значит, наименьшее значение равно 2, причем оно достигается, когда $4a + c = 2\sqrt{4ac}$. Перенося все слагаемые налево, получаем, что $(2\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 = 0$, откуда $2\sqrt{a} = \sqrt{c}$ и $c = 4a$. Подставляя c в формулу $ac = \dfrac{9}{16}$ и помня, что a, $c > 0$, получаем $a = \dfrac{3}{8}$ и $c = \dfrac{3}{2}$.

Замечание. Можно рассуждать и по-другому. Заметим, что если парабола $y = ax^2 + bx + c$ касается прямой $y = x$, то $ax^2 + bx + c \geqslant x$ для всех $x \geqslant 0$, поэтому минимальное значение параболы в точке 2 не может быть меньше 2. Докажем, что оно равно 2. Для этого нужно найти параболу, которая касалась бы прямой $y = x$ в точке $(2; 2)$, а также касалась бы прямой $y = -2x$. Любая парабола, касающаяся прямой $y = x$ в точке $(2; 2)$, имеет вид $y = a(x-2)^2 + x$: у этой функции и у функции $y = x$ совпадают значения в точке $x = 2$ и значения производных в этой точке, а потому графики этих функций касаются. Далее, найдем число a из условия касания с прямой $y = -2x$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы квадратное уравнение $a(x-2)^2 + x = -2x$ имело бы единственное решение. Дискриминант этого уравнения равен $D = 9 - 24a$, поэтому уравнение будет иметь единственное решение при $D = 0$ и $a = 3/8$. Подставляя найденное значение a в уравнение параболы $y = a(x-2)^2 + x$, получаем ответ.

Критерии

Любое полное решение, в котором верно получена парабола вида $ax^2 + bx + c$, подходящая под условие задачи, оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Обоснованно найдены коэффициенты a, b и c, но ответ неверен из-за вычислительной ошибки.
- 3 б. Верно найдено значение коэффициента b, но коэффициенты a и c не найдены.
- 3 б. Доказано, что искомая парабола имеет вид $y = a(x-2)^2 + x$, но значение параметра a не найдено.
- 1 б. Доказано, что наименьшее значение равно 2, но других продвижений нет.

Принимались также решения, в которых задача трактовалась так, что искомая парабола должна принимать **своё** наименьшее значение в точке $x = 2$. В этой трактовке ответ, решение и критерии приведены ниже.

Ответ: $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.

Решение. Пусть наша парабола имеет вершину в точке $x = 2$. Тогда ее уравнение выглядит так: $y = a(x-2)^2 + d$ для некоторых чисел a и d.

Рассмотрим случай, когда искомая парабола вписана в данный угол, т.е. касается обеих прямых $y = x$ и $y = -2x$. Касание с прямой $y = x$ означает, что квадратное уравнение $a(x-2)^2 + d = x$ имеет единственное решение, т.е. дискриминант D_1 этого квадратного уравнения равен 0. Запишем это условие: $D_1 = (4a+1)^2 - 4a(4a+d) = 0$.

Аналогично, касание с прямой $y = -2x$ означает, что квадратное уравнение $a(x-2)^2 + d = -2x$ имеет единственное решение, поэтому дискриминант D_2 этого квадратного уравнения также равен 0: $D_2 = (4a-2)^2 - 4a(4a+d) = 0$.

Из этих двух равенств следует, что $(4a+1)^2 = (4a-2)^2$, поскольку оба этих выражения равны $4a(4a+d)$. Решая это уравнение относительно a, получаем $a = \frac{1}{8}$. Подставим это значение a в формулу для D_1 и найдем $d = 4$. Таким образом, мы нашли уравнение искомой параболы:

$$y = \frac{1}{8}(x-2)^2 + 4 \text{ или } y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}.$$

Критерии

Любое полное решение, в котором верно получена парабола вида $ax^2 + bx + c$, подходящая под условие задачи, оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Обоснованно найдено уравнение параболы, но ответ неверен из-за вычислительной ошибки.
- 3 б. Правильно записаны условия минимума параболы в точке $x = 2$ и касания прямых $y = x$ и $y = -2x$, но дальнейших продвижений нет.
- 1 б. Правильно записаны условия минимума параболы в точке $x = 2$, т.е. что вид параболы $y = a(x-2)^2 + d$, при этом значения параметров a и d не найдены.