9 класс

Задача 9.1. Найдите все натуральные числа n такие, что число n^2 делится на число $[\sqrt{n}]^3$. (Здесь $[x]$ обозначает целую часть от x.)

Ответ: 2, 3, 8, 24 и все точные квадраты.

Решение. Пусть $[\sqrt{n}] = k$, тогда $k^2 \leqslant n \leqslant k^2 + 2k$. Так как число n^2 делится на k^3, то оно делится и на k^2, а потому число n делится на k. Среди чисел на отрезке $[k^2; k^2 + 2k]$ на k делятся только числа $n = k^2$, или $n = k^2 + k$, или $n = k^2 + 2k$.

Первый случай дает ответ $n = k^2$, т.е. нам подходят все точные квадраты.

Во втором случае, подставляя $n = k^2 + k$ в условие, получаем, что число $(k^2 + k)^2$ делится на k^3, откуда следует, что число $(k + 1)^2$ делится на k. Но числа $k + 1$ и k взаимно просты, поэтому $k = 1$ и $n = 2$. Это еще один ответ.

Наконец, в третьем случае, подставляя $n = k^2 + 2k$ в условие, получаем, что $(k^2 + 2k)^2$ делится на k^3, откуда следует, что число $(k + 2)^2$ делится k. Раскрывая скобки, получаем, что на самом деле 4 делится на k, откуда $k = 1$, 2, 4, и $n = 3$, 8, 24 — остальные ответы.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 4 б. Один из случаев $n = k^2$, $n = k^2 + k$ или $n = k^2 + 2k$ разобран неверно.
- 2 б. Доказано, что число имеет вид $n = k^2$, $n = k^2 + k$ или $n = k^2 + 2k$, но других продвижений нет.
- 1 б. Доказано, что все полные квадраты подходят, других продвижений нет.

Задача 9.2. Решите систему уравнений в вещественных числах:

$$\begin{cases} ab + c + d = 1 \\ bc + d + a = 5 \\ cd + a + b = 2 \\ da + b + c = 6. \end{cases}$$

Ответ: $a = \dfrac{9}{4}$, $b = -1$, $c = \dfrac{1}{4}$, $d = 3$.

Решение. Вычтем первые два уравнения и вторые два. Получим

$$(a-c)(b-1) = -4, \quad (a-c)(d-1) = 4.$$

Поделим эти равенства друг на друга: $\dfrac{b-1}{d-1} = -1$, откуда $b-1 = 1-d$ и $b+d = 2$.

Далее, вычтем второе и третье уравнения, а также первое и четвертое:

$$(b-d)(c-1) = 3, \quad (b-d)(a-1) = -5.$$

Вновь поделим эти равенства друг на друга: $\dfrac{c-1}{a-1} = -\dfrac{3}{5}$, откуда $5(c-1) = -3(a-1)$ и $c = \frac{8-3a}{5}$.

Теперь сложим первое и последнее уравнения и подставим в него сумму $b+d = 2$ и $c = \frac{8-3a}{5}$:

$$a(b+d) + 2c + (b+d) = 7 \quad \Rightarrow \quad 2a + \frac{2(8-3a)}{5} + 2 = 7.$$

Решая это уравнение, находим $a = \frac{9}{4}$ и $c = \frac{8-3a}{5} = \frac{1}{4}$. Тогда $a - c = 2$, и из равенств

$$(a-c)(b-1) = -4, \quad (a-c)(d-1) = 4$$

находим $b = -1$ и $d = 3$.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 4 б. Задача верно сведена к линейному уравнению на одну из переменных, но окончательный ответ неверен из-за вычислительной ошибки.
- 1 б. Получен только ответ.

Задача 9.3. Последовательность чисел a_n определяется условиями $a_1 = 20$, $a_2 = 50$, $a_{n+1} = a_{n-1} - \frac{3}{a_n}$. Найдите номер первого отрицательного члена этой последовательности.

Ответ: $n = 336$.

Решение. Перепишем рекуррентное условие последовательности как

$$a_{n+1}a_n = a_n a_{n-1} - 3.$$

Значит, произведение соседних членов последовательности каждый раз уменьшается на 3. Оба начальных члена последовательности положительны, значит, пока это произведение положительно, каждый следующий член последовательности будет оставаться положительным. $a_1 a_2 = 1000$, значит,

$$a_n a_{n+1} = 1000 - 3(n-1).$$

Первый раз это произведение станет отрицательным при $n = 335$, значит, a_{336} будет первым отрицательным членом последовательности.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. В целом решение верное, однако получен неверный ответ из-за логической или арифметической ошибки.

Задача 9.4. В узлах квадратной сетки лежат камешки (камешков конечное количество, в одном узле может быть несколько камешков). Разрешается делать следующий *ход*: выбрать два камешка, переложить один из них в другой узел сетки, а другой переместить на то же расстояние в противоположном направлении. Всегда ли можно за несколько ходов добиться того, чтобы все камешки лежали на одной прямой?

Ответ: Да, всегда.

Решение. Для начала заметим, что можно сдвинуть камешки так, чтоб они попали в четыре вершины единичного квадратика.

Пусть у нас будут вертикальные и горизонтальные линии сетки. Разность координат по горизонтальной оси между самым правым камешком и самым левым камешком мы будем называть *шириной*.

Выберем самый левый и самый правый камешек, и сдвинем левый камешек на 1 вправо, а правый камешек – на один влево. Что могло произойти?

1. Ширина могла уменьшиться.
2. Если ширина не уменьшилась, то тогда суммарное количество самых левых

камешков и самых правых камешков могло уменьшиться
3. Если же суммарное количество крайних слева и крайних справа камешков не уменьшилось, это означает, что при сдвиге самый левый камешек стал самым правым, а самый правый стал самым левым, то есть, что ширина равна 1.

Будем повторять эту процедуру, пока ширина не станет равна 1, то есть, пока камешки не лягут на две соседние вертикали.

Аналогичным образом, сдвигая самый верхний и самый нижний камешек, мы можем добиться того, что все камешки будут на двух соседних горизонталях.

Значит, теперь все камешки лежат в вершинах единичного квадратика.

Теперь, пусть единичный квадратик это $ABCD$. Выберем его вершину, в которой лежит наименьшее количество камешков, пусть, без ограничения общности это вершина A. Сместим все камешки из A в B, и соответствующее количество камешков из C в D. Получится, что камешки лежат ровно в трёх узлах B, C, D.

Теперь запустим процесс: на каждом шаге все камешки будут лежать в трёх узлах сетки. Выберем узел, в котором лежит наибольшее количество камешков, пусть это узел X, выберем узел с наименьшим количеством камешков, пусть это узел Z. Столько камешков, сколько было в Z, переложим из Y в X, и переложим все камешки из Z на такое же расстояние, но в противоположное расстояние в какой-то новый узел T. Узел T теперь новый узел Z.

Таким образом, из этих трёх узлов узел с максимальным количеством камешков увеличил количество своих камешков, то есть, сумма камешков в двух оставшихся узлах уменьшилась. Поэтому процесс конечен и в какой-то момент камешки в одном из двух оставшихся узлов иссякнут.

Обратите внимание, что в данном процессе узел с наибольшим количеством камешков всегда сохраняется, а вот узел с наименьшим количеством камешков может меняться.

Раз камешки лежат только в двух узлах, то они лежат на прямой, проходящей через эти два узла и мы добились требуемого.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 2 б. Доказано, что можно загнать камешки в вершины единичного квадратика.
- 3 б. (не суммируется с предыдущим критерием). Доказано, что можно загнать камешки в вершины треугольника.

- 0 б. Только ответ.

Задача 9.5. Прямоугольник со сторонами 8 и 9 разделили на две части: треугольник и четырёхугольник. Чему равна наибольшая сумма радиусов двух кругов, которые можно поместить в каждую из этих частей?

Ответ: 5.

Решение. Пусть отрезок AE разбивает прямоугольник $ABCD$ на треугольник ABE и четырёхугольник $AECD$. Обозначим центры двух находящихся в кругов как O_1 и O_2, а их радиусы за a и b.

Проведём через центры кругов две прямые параллельно сторонам прямоугольника $ABCD$ — пусть они пересекаются в точке M. Расстояния от центра O_1 до сторон AB и BC не меньше a, аналогично расстояния от центра O_2 до сторон AD и CD не меньше b. Тогда $MO_1 < 9 - (a+b)$ и $MO_2 < 8 - (a+b)$. В то же время расстояние между центрами O_1O_2 не меньше $(a+b)$, так как расстояния от каждого из них до прямой AE не меньше своего радиуса. По теореме Пифагора для треугольника MO_1O_2

$$O_1O_2^2 = O_1M^2 + O_2M^2$$

Пусть $a + b = x$. Тогда

$$x^2 \leqslant (8-x)^2 + (9-x)^2$$

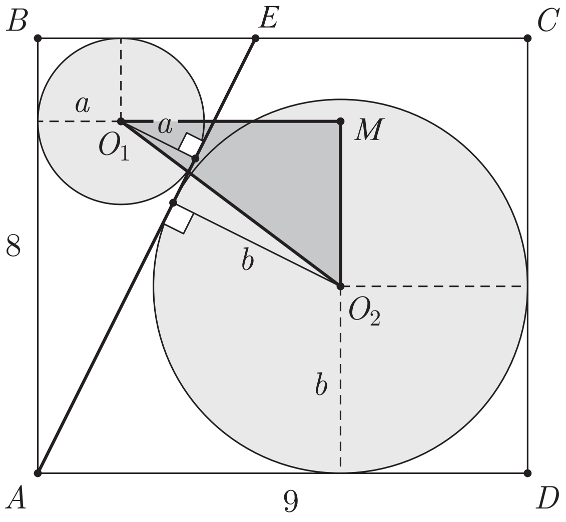
Откуда

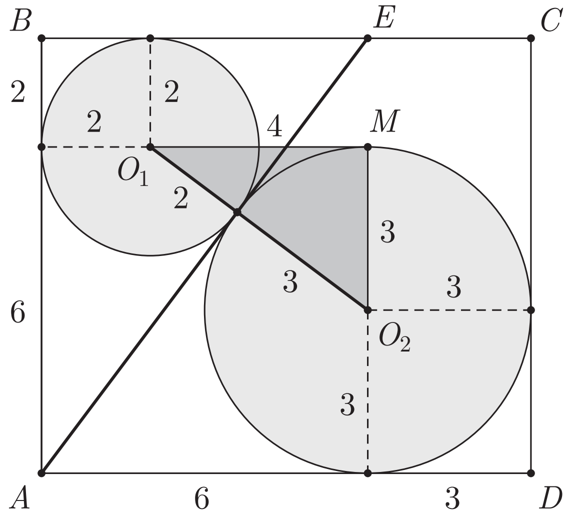
$$x^2 - 34x + 145 \geqslant 0$$

Тогда по смыслу получаем, что

$$x \leqslant 5$$

Сумма радиусов $a + b = 5$ достигается, если круги касаются отрезка AE в одной точке и каждый из них касается еще двух сторон прямоугольника. Этот случай показан на втором рисунке.





Критерии

- Получен обоснованный ответ — 7 баллов
- Получен верный ответ без доказательства максимальности суммы радиусов кругов — 2 балла
- Получен верный ответ и проведено доказательство максимальной суммы радиусов кругов, но не обоснованно существование такой конфигурации — 6 баллов
- Получен неверный ответ либо правильный ответ для случая, когда одна из частей является пятиугольником — 0 баллов