8 класс

Задача 8.1. Найдите все трёхзначные числа N, кратные 11, такие, что число $\frac{N}{11}$ равно сумме квадратов цифр числа N.

Ответ: 550 или 803.

Решение. Раз число N делится на 11, его можно представить в виде $N = \overline{ab} \cdot 11$ (первый сомножитель является именно двузначным числом: если он будет цифрой, то $N \leqslant 99$, а если больше 100, то $N \geqslant 1100 > 999$). Выполним умножение двузначного числа $\overline{ab}$ на 11 в столбик:

$$\begin{array}{r} a\,b \\ \times 1\,1 \\ \hline a\,b \\ a\,b \\ \hline \cdot\ \cdot\ b \end{array}$$

Цифры, стоящие на месте точек, зависят от того, будет ли переход через десяток при сложении цифр a и b. Разберем два случая.

Случай 1: $a + b < 10$. Тогда $N = \overline{ac_1b}$, где $c_1 = a + b$. Условие задачи записывается так: $\overline{ab} = 10a + b = a^2 + (a + b)^2 + b^2$. Перепишем это уравнение в виде $2a^2 + 2(b - 5)a + 2b^2 - b = 0$. Отсюда сразу следует, что цифра b четна. Будем рассматривать это уравнение как квадратное относительно a. Тогда его дискриминант, деленный на 4, равен

$$D_1 = (b - 5)^2 - 2(2b^2 - b) = -3b^2 - 8b + 25.$$

Если $b = 0$, то $D_1 = 25 = 5^2$ и $a = 5$, откуда $N = 50 \cdot 11 = 550$. Если же $b \geqslant 2$, то $D_1 \leqslant -3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 25 = -3 < 0$, т.е. все такие цифры не подходят. Таким образом, в этом случае получается единственный ответ $N = 550$.

Случай 2: $a + b \geqslant 10$. Тогда $N = \overline{(a + 1)c_2b}$, где $c_2 = a + b - 10$. Условие задачи записывается так: $\overline{ab} = 10a + b = (a + 1)^2 + (a + b - 10)^2 + b^2$. Перепишем это уравнение в виде $2a^2 + 2(b - 14)a + (2b^2 - 21b + 101) = 0$. Отсюда сразу следует, что цифра b нечетна. Будем рассматривать это уравнение как квадратное относительно a. Тогда его дискриминант, деленный на 4, равен

$$D_2 = (b - 14)^2 - 2(2b^2 - 21b + 101) = -3b^2 + 14b - 6.$$

Если $b = 1$, то $D_1 = 5$ — не точный квадрат. Если $b = 3$, то $D_2 = 9 = 3^2$ и $a = 4$ или $a = 7$. Поскольку $a + b \geqslant 10$, нам подходит только $a = 7$, откуда $N = 73 \cdot 11 = 803$. Если же $b \geqslant 5$, то $D_2 \leqslant -3 \cdot 5^2 + 14 \cdot 5 - 6 = -11 < 0$, т.е. все такие цифры не подходят. Таким образом, в этом случае также получается единственный ответ $N = 803$.

Замечание. Уравнения $2a^2 + 2(b-5)a + 2b^2 - b = 0$ и $2a^2 + 2(b-14)a + (2b^2 - 21b + 101) = 0$, которые возникли при рассмотрении случаев 1 и 2, можно не решать, а перебрать все цифры b (для первого уравнения — четные, а для второго — нечетные) и таким образом найти ответы.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Один из случаев разобран верно, другой разобран неверно из-за вычислительной ошибки.
- 3 б. Верно разобран случай 1, но случай 2 отсутствует.
- 1 б. Верно найдены оба ответа, других продвижений нет.

Задача 8.2. Каждую клетку квадрата 10×10 покрасили в красный, жёлтый или зелёный цвет. Назовём светофором группу из трёх клеток, расположенных подряд по вертикали или горизонтали, в которой цвета чередуются “красный–жёлтый–зелёный” или “зелёный–жёлтый–красный”. Какое наибольшее количество светофоров могло получиться?

Ответ: 80.

Решение. Посмотрим на столбец и оценим, сколько вертикальных светофоров в нём может получиться. Заметим, что у всех таких светофоров должны быть разные жёлтые клетки (одна и та же жёлтая клетка не может принадлежать двум вертикальным светофорам). Предположим, что мы расположили 5 вертикальных светофоров в одном столбце. Тогда у них есть 5 разных жёлтых клеток, и либо две из них находятся рядом, либо одна находится с краю — в обоих случаях не все жёлтые клетки лежат в каких-то светофоров. Значит, в одном столбце может быть максимум 4 светофора. То же верно и для строк. Таким образом, суммарно светофоров не больше $2 \cdot 10 \cdot 4 = 80$. Пример, когда это число достигается, можно построить так: разделим весь квадрат на диагонали, идущие в одном направлении, и покрасим их в следующем порядке: “красная–жёлтая–зелёная–жёлтая...”. Нетрудно понять, что в каждой строке и каждом столбце тогда будет по 4 светофора.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения критерии суммируются:

- +1 б. Доказано, что в одном столбце (соотв. строчке) не больше 4 вертикальных (соотв. горизонтальных) светофоров.
- +4 б. Доказано, что светофоров не больше 80.
- +3 б. Приведён пример для 80 светофоров.
- Если утверждение о том, что в одном столбце (строчке) не больше 4 вертикальных (горизонтальных) светофоров, используется, но не объясняется, снимается 1 балл.

Задача 8.3. На острове живут рыжие и блондины. Рыжие всегда лгут, а блондины всегда говорят правду. За круглый стол сели 25 жителей острова. 23 из них сказали: "Цвет волос у моих соседей одинаковый", а оставшиеся двое сказали: "За этим столом сидит хотя бы 13 рыжих". Сколько блондинов могло сидеть за столом?

Ответ: 9 или 11.

Решение. Сразу заметим, что все блондинами быть не могут. Те, кто сказали "За этим столом сидит хотя бы 13 рыжих", либо оба блондины, либо оба рыжие.

Предположим, что они оба рыжие, тогда рыжих за столом не больше 12, и хотя бы два блондина сидят рядом. Но все блондины в этом случае должны были сказать первую фразу, тогда соседи этих блондинов — также блондины, и так далее получаем, что все за столом должны быть блондинами, чего быть не может.

Значит, вторую фразу сказали блондины, рыжих как минимум 13, и все рыжие сказали первую фразу.

Тогда заметим, что у рыжего с одной стороны должен сидеть рыжий, а с другой блондин. Значит, рыжие сидят парами, и их чётное число. Тогда их как минимум 14. С другой стороны, справа от каждой такой пары рыжих должен сидеть хотя бы один блондин, значит, всего рыжих не больше чем две трети от общего количества, то есть не больше 16 (так как $\frac{17}{25} > \frac{1}{3}$).

Значит, рыжих либо 14, либо 16, а блондинов либо 11, либо 9.

Приведём примеры для обоих случаев (Б — блондин, Р — рыжий):

1. Б+БРР$\times$8 (9 блондинов, вторую фразу сказали два блондина, сидящие рядом);
2. ББББ+БРР$\times$7 (11 блондинов, вторую фразу сказали крайние блондины из пятёрки сидящих подряд).

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения критерии суммируются:

- +2 б. Доказано, что рыжих как минимум 13.
- +1 б. Замечено, что все рыжие обязаны сидеть парами.
- +2 б. Показано, что рыжих либо 14, либо 16.
- +2 б. Приведены примеры рассадки для обоих случаев (по 1 баллу за каждый пример).

Задача 8.4. Пусть $f(x) = x^2 + \sqrt{19}x + 1$ и $g(x) = x^2 + \sqrt{17}x + 1$. Обозначим через a и b корни многочлена f, а через c и d — корни многочлена g. Вычислите $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$.

Ответ: -2.

Решение. Запишем разложения квадратных трехчленов $f(x)$ и $g(x)$ на множители: $f(x) = (x-a)(x-b)$ и $g(x) = (x-c)(x-d)$. Кроме того, имеет место равенство $f(x) = g(x) + (\sqrt{19} - \sqrt{17})x$. Теперь заметим, что

$$(c-a)(c-b) = f(c) = g(c) + (\sqrt{19} - \sqrt{17})c = (\sqrt{19} - \sqrt{17})c$$

и

$$(d+a)(d+b) = f(-d) = g(d) - (\sqrt{17} + \sqrt{19})d = -(\sqrt{19} + \sqrt{17})d.$$

Поэтому наше произведение равно

$$\Big((\sqrt{19} - \sqrt{17})c\Big) \cdot \Big(-(\sqrt{19} + \sqrt{17})d\Big) = (\sqrt{17}^2 - \sqrt{19}^2)cd = -2,$$

т.к. по теореме Виета для квадратного трехчлена $g(x)$ произведение cd его корней равно 1.

Критерии

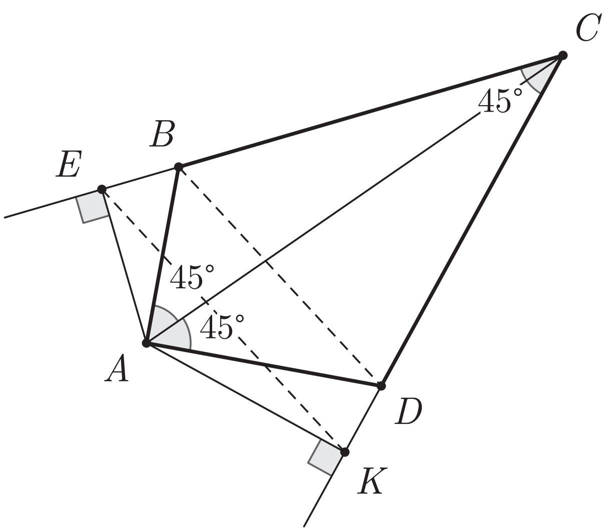
Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 4 б. Допущена вычислительная ошибка в применении теоремы Виета, из-за которой получен неверный ответ.
- 2 б. Установлена связь искомого произведения с разложениями квадратных трехчленов f и g на множители или теоремами Виета, но решение не завершено или завершено неверно.
- 0 б. Ответ неверен из-за вычислительной ошибки при вычислении с помощью формулы для корней квадратного уравнения.

Задача 8.5. В четырёхугольнике $ABCD$ углы BAC, DAC и BCD равны $45°$. На прямые BC и CD опустили перпендикуляры AE и AK.

а) Докажите, что прямые EK и BD параллельны.

б) Найдите EK, если $AB = 3$, $AD = 4$.



Ответ: $40°$.

Решение. а) Отразим точку A относительно прямых BC и CD и получим точки P и Q. Тогда треугольники PBC и ABC равны, и треугольники COD и CAD равны. Поэтому $CP = CA = CQ$, и углы CPB и CQD равны $45°$.

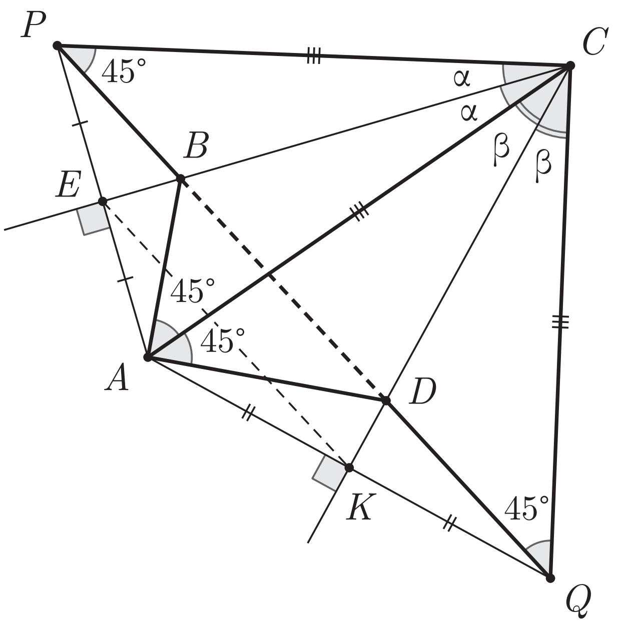
Аналогично, $\angle BCP = \angle BCD$ и $\angle QCD = \angle ACD$. Так как по условию угол BCD равен $45°$, то $\angle PCQ = 90°$.

Тогда треугольник PCQ равнобедренный и его острые углы при вершинах P и Q равны $45°$. Поэтому точки B и D лежат на отрезке PQ.

Отрезок EK — средняя линия треугольника ABQ, поэтому он параллелен BD.

б) Так как $BP = AB$ и $QD = AD$, то отрезок PQ равен периметру треугольника ABC. Тогда EK равен половине его периметра.

По теореме Пифагора найдём, что $BD = 5$. Значит, $EK = (3 + 4 + 5) : 2) = 6$.



Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 4 б. Проведено доказательство в пункте а), но ответ не получен в пункте б).
- 2 б. В доказательстве пункта а) построены симметричные точки P и Q, но не обоснованно, что точки B и D лежат на отрезке PQ.
- 5 б. Предыдущий критерий при условии получения верного ответа.
- 2 б. Доказательство проведено через центр вневписанной окружности треугольника ABD, но корректно не проведено рассуждение с помощью обратного хода.
- 5 б. Предыдущий критерий при условии получения верного ответа.