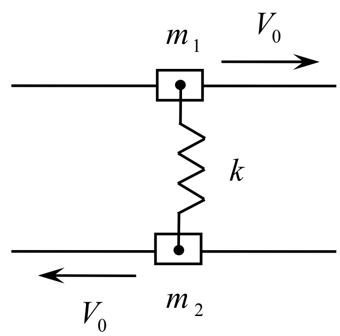
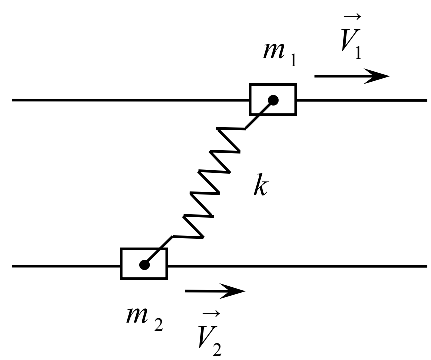
Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2023

Отборочный этап. 9 класс

Задача 1 / 1. Два длинных параллельных стержня закреплены в горизонтальной плоскости. По стержням могут скользить без трения грузы 1 и 2 массами $m_1 = 0{,}15$ кг и $m_2 = 0{,}09$ кг. Грузы соединены невесомой пружиной жёсткостью $k = 75$ Н/м. Пружина может свободно поворачиваться вокруг точек крепления к грузам. В некоторый момент времени, когда расстояние между грузами минимально, пружина растянута и скорости грузов $V_0 = 0{,}3$ м/с одинаковы по абсолютной величине и направлены в противоположные стороны. Удлинение пружины в этом положении $x_0 = 1{,}5$ см. Найдите максимальное удлинение пружины x при дальнейшем движении. Ответ выразите в сантиметрах и округлите до десятых.



Возможное решение



Обозначим через $\vec{V_1}$ и $\vec{V_2}$ скорости грузов в некотором произвольном положении. Введём относительную скорость грузов $\vec{V}_{\text{отн}}$:

$$\vec{V}_{\text{отн}} = \vec{V_1} - \vec{V_2}\,.$$

Эта скорость направлена вдоль стержней. Максимальное и минимальное значения длины пружины реализуются в случаях, когда проекция относительной скорости на направление пружины обращается в нуль. Когда длина пружины максимальна, это направление образует со стержнями угол, отличный от прямого. Поэтому в этом случае относительная скорость равна нулю и скорости грузов совпадают. Обозначим эти скорости через $\vec{V}$:

$$\vec{V}_{\text{отн}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{V_1} = \vec{V_2} \equiv \vec{V}\,.$$

Так как грузы движутся без трения, их суммарный импульс сохраняется:

$$m_1 V_0 - m_2 V_0 = m_1 V + m_2 V \quad \longrightarrow \quad V = \frac{(m_1 - m_2)\,V_0}{m_1 + m_2}\,.$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 V_0^2}{2} + \frac{m_2 V_0^2}{2} + \frac{k x_0^2}{2} = \frac{m_1 V^2}{2} + \frac{m_2 V^2}{2} + \frac{k x^2}{2} \quad \longrightarrow \quad (m_1 + m_2)\,V_0^2 + k x_0^2 = (m_1 + m_2)\,V^2 + k x^2\,.$$

Подставляя в это уравнение выражение для V, находим максимальное удлинение пружины x:

$$(m_1 + m_2)\,V_0^2 + k x_0^2 = (m_1 + m_2)\cdot\frac{(m_1 - m_2)^2\,V_0^2}{(m_1 + m_2)^2} + k x^2\,,$$

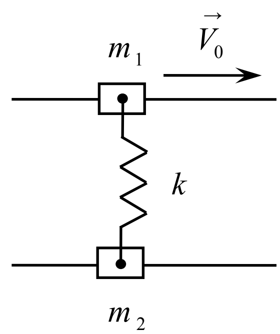
$$kx^2 = kx_0^2 + \frac{V_0^2}{m_1 + m_2}\left[(m_1+m_2)^2 - (m_1-m_2)^2\right] = kx_0^2 + \frac{4m_1\,m_2\,V_0^2}{m_1+m_2},$$

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{4m_1\,m_2\,V_0^2}{(\,m_1+m_2\,)\,k}} = 2{,}2\ \text{см}\,.$$

Ответ:

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{4m_1\,m_2\,V_0^2}{(\,m_1+m_2\,)\,k}} = 2{,}2\ \text{см}\,.$$

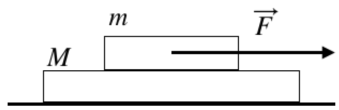
Задача 1 / 2. Два длинных параллельных стержня закреплены в горизонтальной плоскости. По стержням могут скользить без трения грузы 1 и 2 массами $m_1 = 0{,}25$ кг и $m_2 = 0{,}1$ кг. Грузы соединены невесомой пружиной жёсткостью $k = 50$ Н/м. Пружина может свободно поворачиваться вокруг точек крепления к грузам. В некоторый момент времени, когда расстояние между грузами минимально, пружина растянута, скорость груза 1 равна $V_0 = 0{,}8$ м/с, а скорость груза 2 равна нулю. Удлинение пружины в этом положении $x_0 = 2{,}5$ см. Найдите максимальное удлинение пружины x при дальнейшем движении. Ответ выразите в сантиметрах и округлите до десятых.



Ответ:

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{m_1\,m_2\,V_0^2}{(\,m_1+m_2\,)\,k}} = 3{,}9\ \text{см}\,.$$

Задача 2 / 1. Два бруска размещены на поверхности стола так, как показано на рисунке. Коэффициент трения между поверхностью стола и бруском массой $M = 0{,}6$ кг равен $\mu_1 = 0{,}25$. Коэффициент трения между бруском массой $m = 0{,}4$ кг и поверхностью бруска массой M равен $\mu_2 = 1{,}0$. К бруску m приложили горизонтальную силу $\vec{F} = 3{,}4$ Н, как показано на рисунке. Найти величину силы трения $F_{\text{тр}}$, действующую на брусок m, в случае, когда оба бруска движутся с одинаковыми ускорениями. Ускорение свободного падения примите равным 10 м/с^2, ответ округлите до сотых.



Возможное решение

Напишем второй закон Ньютона для верхнего и нижнего брусков в проекции на направление действия силы $\vec{F}$:

$$ma_1 = F - F_{\text{тр}},$$

$$Ma_2 = F_{\text{тр}} - \mu_1(M+m)g,$$

где a_1 – ускорение верхнего бруска, a_2 – ускорение нижнего бруска. Условием сцепленного движения брусков будет равенство ускорений $a_1 = a_2$. При этом нужно учитывать, что сила трения $F_{\text{тр}}$ может принимать значения на отрезке $[0, \mu_2 mg]$. Напишем условие сцепленного движения:

$$\frac{F - F_{\text{тр}}}{m} = \frac{F_{\text{тр}} - \mu_1(M+m)g}{M}.$$

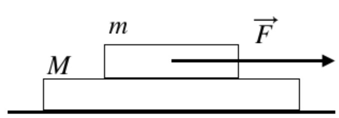
Отсюда выражаем искомое значение силы трения:

$$F_{\text{тр}} = \frac{M}{M+m}F + \mu_1 mg = 3{,}04 \text{ Н}.$$

Ответ:

$$F_{\text{тр}} = 3{,}04 \text{ Н}.$$

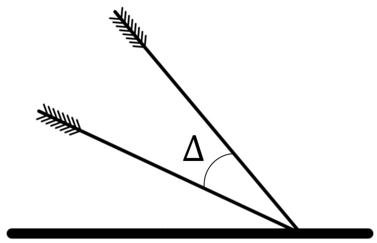
Задача 2 / 2. Два бруска размещены на поверхности стола так, как показано на рисунке. Коэффициент трения между поверхностью стола и бруском массой $M = 0{,}9$ кг равен $\mu_1 = 0{,}2$. Коэффициент трения между бруском массой $m = 0{,}3$ кг и поверхностью бруска массой M равен $\mu_2 = 2$. К бруску m приложили горизонтальную силу $\vec{F} = 5$ Н, как показано на рисунке. Найти величину силы трения $F_{\text{тр}}$, действующую на брусок m, в случае, когда оба бруска движутся с одинаковыми ускорениями. Ускорение свободного падения примите равным 10 м/с^2, ответ округлите до сотых.



Ответ:

$$F_{\text{тр}} = 4{,}35 \text{ Н}.$$

Задача 3 / 1 . Выстрелив дважды из английского лука, Робин Гуд сумел попасть обеими стрелами в одну точку, стреляя в одной плоскости под разными углами к горизонту. Оказалось, что угол между стрелами в земле составил $\Delta = 40°$. Под какими углами к горизонту в плоскости траектории полета стрелы попали в землю, если обе стрелы были выпущены с одинаковой силой? Сила натяжения английского лука при выстреле равна 140 Н. Считайте, что Робин Гуд тренируется на равнине в безветренную погоду. Ответ выразите в градусах. Примечание: формула синуса двойного угла: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.



Возможное решение

Покажем, что в данной задаче нам не понадобится знать силу натяжения английского лука, достаточно лишь значения угла между стрелами. Пусть скорость, с которой выпущена первая стрела равна v, угол под которым она воткнулась в землю α. Тогда время полета стрелы можно найти как:

$$t = \frac{2v\sin\alpha}{g}.$$

Умножая на горизонтальную составляющую скорости можно найти дистанцию, на которой приземлилась стрела:

$$s_1 = v\cos\alpha\, t = \frac{2v^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Тогда обозначая второй угол за β, получим аналогичное выражение для дальности полёта второй стрелы. Поскольку стрелы выпускают с одинаковой силой, начальные скорости будут равны по модулю в обоих случаях:

$$s_2 = v\cos\beta\, t = \frac{2v^2}{g}\sin\beta\cos\beta.$$

По условию дальности полёта стрел равны, что приводит нас к следующему уравнению:

$$\sin\alpha\cos\alpha = \sin\beta\cos\beta \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin 2\beta.$$

Нас не интересует решение $\alpha = \beta$, также нам интересны лишь углы, лежащие в пределах 90 градусов. Перепишем уравнение, используя, например, формулы приведения:

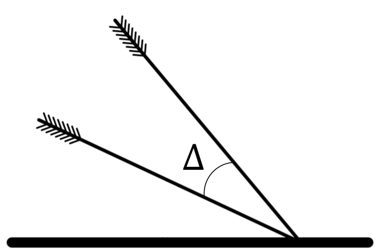
$$\cos(2\alpha - 90°) = \cos(90° - 2\beta) \Rightarrow 2\alpha - 90° = 90° - 2\beta \Rightarrow \alpha = 90° - \beta.$$

Разность углов равна: $\Delta = \beta - \alpha = 40°$. Решая систему уравнений, получаем искомые углы: $\alpha = 25°, \quad \beta = 65°$.

Ответ:

$$\alpha = 25°, \quad \beta = 65°.$$

Задача 3 / 2. Выстрелив дважды из английского лука, Робин Гуд сумел попасть обеими стрелами в одну точку, стреляя в одной плоскости под разными углами к горизонту. Оказалось, что угол между стрелами в земле составил $\Delta = 20°$. Под какими углами к горизонту в плоскости траектории полета стрелы попали в землю, если обе стрелы были выпущены с одинаковой силой? Сила натяжения английского лука при выстреле равна 150 Н. Считайте, что Робин Гуд тренируется на равнине в безветренную погоду. Ответ выразите в градусах. Примечание: формула синуса двойного угла: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.



Ответ:

$$\alpha = 35°, \quad \beta = 55°.$$

Задача 4 / 1. Емеля едет на печи по заснеженному полю. Скорость печи постоянна по модулю и по направлению и равна $v = 1,5$ м/с. Масса печи равна $M = 4$ т. Коэффициент трения нижней поверхности печи о снег равен $\mu = 0{,}05$. Емеля топит печь древесным углём с удельной теплотой сгорания $\lambda = 36{,}3$ МДж/кг. Вычислите, с какой равномерной скоростью u Емеля должен подбрасывать уголь в печь, чтобы поддерживать равномерное движение печи. Считать, что только 20 % энергии от сгорания топлива расходуется на работу против силы трения. Печь может двигаться, только пока Емеля ее топит дровами. Пренебречь сопротивлением воздуха и изменением массы печи из-за сгорания топлива, которое Емеля везет с собой. Ответ выразите в г/с и округлите до десятых.

Возможное решение

На промежутке пути Δs сила трения совершает работу

$$A = \mu M g \Delta s.$$

Этот промежуток пути можно выразить через время, затраченное на его прохождение:

$$\Delta s = v \Delta t.$$

С другой стороны, за это же время Емеля должен подбросить в печь топливо массой

$$m = \frac{A}{0{,}2\lambda}.$$

Емеля подбрасывает топливо равномерно, следовательно

$$m = u \Delta t,$$

где u - искомая скорость. Приравнивая выражения, получаем ответ:

$$u\Delta t = \frac{\mu M g v \Delta t}{0{,}2\lambda} \Rightarrow u = \frac{\mu M g v}{0{,}2\lambda} \approx 0{,}4 \text{ г/с}.$$

Ответ:

$$u = \frac{\mu M g v}{0{,}2\lambda} \approx 0{,}4 \text{ г/с}.$$

Задача 4 / 2. Емеля едет на печи по заснеженному полю. Скорость печи постоянна по модулю и по направлению и равна $v = 1{,}2$ м/с. Масса печи равна $M = 10$ т. Коэффициент трения нижней поверхности печи о снег равен $\mu = 0{,}06$. Емеля топит печь древесным углём с удельной теплотой сгорания $\lambda = 36{,}3$ МДж/кг. Вычислите, с какой равномерной скоростью u Емеля должен подбрасывать уголь в печь, чтобы поддерживать равномерное движение печи. Считать, что только 25 % энергии от сгорания топлива расходуется на работу против силы трения. Печь может двигаться, только пока Емеля ее топит дровами. Пренебречь сопротивлением воздуха и изменением массы печи из-за сгорания топлива, которое Емеля везет с собой. Ответ выразите в г/с и округлите до десятых.

Ответ:

$$u = \frac{\mu M g v}{0{,}25\lambda} \approx 0{,}8 \text{ г/с}.$$