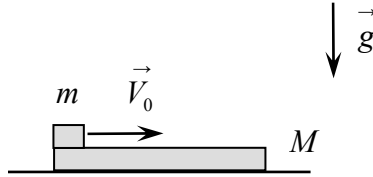
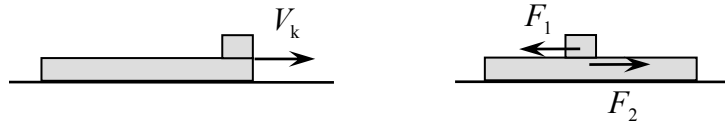


Отборочный этап. 11 класс

Задача 1 / 1. На гладком горизонтальном столе лежит тонкая доска массой $M = 0,1$ кг и длиной $L = 0,9$ м. На левом краю доски расположена маленькая плоская шайба массой $m = 0,05$ кг. Коротким ударом шайбе сообщают скорость V_0 , направленную вдоль доски вправо. Найдите минимальное значение этой скорости, при котором шайба соскользнет с доски. Коэффициент трения скольжения шайбы по доске $\mu = 0,2$; ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Ответ выразите в м/с и округлите до десятых. Считайте, что за время удара доска не успела прийти в движение.



Возможное решение



Очевидно, что минимальное значение скорости V_0 соответствует случаю, когда по отношению к доске шайба останавливается на её правом краю. При этом относительно стола шайба и доска движутся с одной и той же конечной скоростью V_k . Найдём её из закона сохранения импульса:

$$m V_0 = (m + M) V_k \quad \rightarrow \quad V_k = \frac{m V_0}{m + M}.$$

При движении между шайбой и доской действуют силы трения F_1 и F_2 :

$$F_1 = F_2 = \mu m g.$$

Запишем уравнение баланса энергии для шайбы и доски:

$$\frac{(m + M) V_k^2}{2} - \frac{m V_0^2}{2} = A_1 + A_2.$$

Здесь A_1 и A_2 — работы сил F_1 и F_2 . Обозначим через L_1 и L_2 перемещения шайбы и доски относительно стола. Для суммы работ имеем:

$$A_1 + A_2 = -F_1 L_1 + F_2 L_2 = -\mu m g (L_1 - L_2).$$

Разность $L_1 - L_2$ представляет собой перемещение шайбы относительно доски. В нашем случае оно равно длине доски L . Получаем:

$$\frac{(m + M) V_k^2}{2} - \frac{m V_0^2}{2} = -\mu m g L.$$

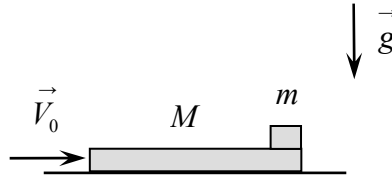
Подставляя сюда выражение для скорости V_k , находим V_0 :

$$V_0 = \sqrt{\frac{2\mu g L (m + M)}{M}} = 2,3 \text{ м/с}$$

Ответ:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2\mu g L (m + M)}{M}} = 2,3 \text{ м/с}$$

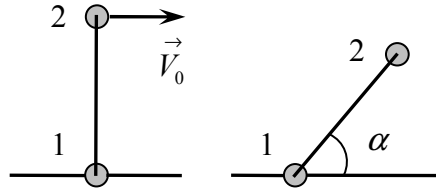
Задача 1 / 2. На гладком горизонтальном столе лежит тонкая доска массой $M = 0,15$ кг и длиной $L = 1,3$ м. На правом краю доски расположена маленькая плоская шайба массой $m = 0,05$ кг. Коротким ударом доске сообщают скорость $V_0 = 2,5$ м/с, направленную вправо. Спустя некоторое время движение шайбы относительно доски прекращается. При этом шайба находится на середине доски. Найдите коэффициент трения скольжения шайбы по доске μ . Ответ округлите до сотых. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Считайте, что за время удара шайба не успела прийти в движение.



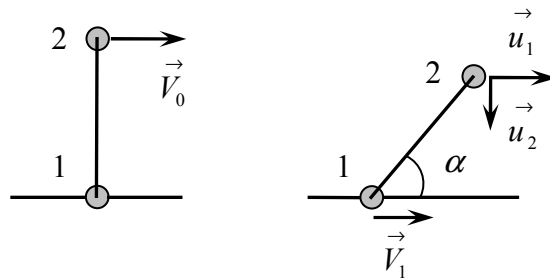
Ответ:

$$\mu = \frac{M V_0^2}{(m + M) g L} = 0,36$$

Задача 2 / 1. По гладкому горизонтальному льду могут скользить две одинаковые маленькие шайбы 1 и 2, соединённые жёстким невесомым стержнем. Стержень может свободно поворачиваться вокруг точек крепления к шайбам. Шайба 1 насажена на туго натянутую проволоку, вдоль которой она может двигаться без трения. В начальном положении стержень перпендикулярен проволоке, скорость шайбы 1 равна нулю, а скорость \vec{V}_0 шайбы 2 параллельна проволоке. Найдите отношение $x = V_1/V_0$, где V_1 — скорость шайбы 1 в момент, когда угол между стержнем и проволокой $\alpha = 30^\circ$. Ответ округлите до сотых. Считайте, что стержень и проволока всё время горизонтальны; деформацию проволоки не учитывайте; шайбы считайте материальными точками.



Возможное решение



Пусть m — масса шайб, \vec{V}_1 и \vec{V}_2 — скорости шайб в конечном положении. Разложим \vec{V}_2 на две взаимно перпендикулярные составляющие:

$$\vec{V}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

Вектор \vec{u}_1 направлен вдоль проволоки, вектор \vec{u}_2 перпендикулярен проволоке. Поскольку шайбы движутся без трения, проекция их суммарного импульса на направление проволоки сохраняется:

$$m V_0 = m V_1 + m u_1 \quad \rightarrow \quad V_0 = V_1 + u_1$$

Так как длина стержня не меняется при движении, проекции скоростей шариков на направление стержня одинаковы:

$$V_1 \cos \alpha = u_1 \cos \alpha - u_2 \sin \alpha$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{m V_0^2}{2} = \frac{m V_1^2}{2} + \frac{m V_2^2}{2} \quad \rightarrow \quad V_0^2 = V_1^2 + u_1^2 + u_2^2$$

Из полученных уравнений нужно найти скорость V_1 . Удобнее сначала найти u_2 . Исключим u_1 из всех уравнений:

$$u_1 = V_0 - V_1$$

$$V_1 \cos \alpha = (V_0 - V_1) \cos \alpha - u_2 \sin \alpha \quad \rightarrow \quad 2 V_1 \cos \alpha = V_0 \cos \alpha - u_2 \sin \alpha \quad \rightarrow \quad V_1 = \frac{1}{2} (V_0 - u_2 \operatorname{tg} \alpha)$$

$$V_0^2 = V_1^2 + (V_0 - V_1)^2 + u_2^2 \quad \rightarrow \quad V_0^2 = V_1^2 + V_0^2 - 2 V_0 V_1 + V_1^2 + u_2^2 \quad \rightarrow \quad 2 V_1^2 - 2 V_0 V_1 + u_2^2 = 0$$

Подставляя в последнее уравнение выражение для V_1 , находим u_2 :

$$2 \cdot \frac{1}{4} (V_0 - u_2 \operatorname{tg} \alpha)^2 - V_0 (V_0 - u_2 \operatorname{tg} \alpha) + u_2^2 = 0,$$

$$V_0^2 - 2 V_0 u_2 \operatorname{tg} \alpha + u_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 V_0^2 + 2 V_0 u_2 \operatorname{tg} \alpha + 2 u_2^2 = 0,$$

$$u_2^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha + 2) = V_0^2 \quad \rightarrow \quad u_2 = \frac{V_0}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 2}}$$

Для скорости V_1 получаем:

$$V_1 = \frac{1}{2} (V_0 - u_2 \operatorname{tg} \alpha) = \frac{V_0}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 2}} \right) = \frac{V_0}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}} \right)$$

Искомое отношение скоростей равно:

$$x = \frac{V_1}{V_0} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}} \right)$$

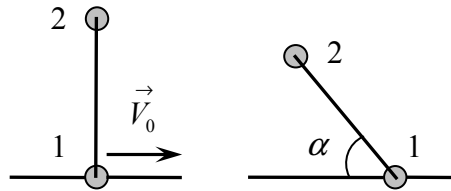
При $\alpha = 30^\circ$ получаем:

$$x = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \cdot 3}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{7}} \right) = 0,31$$

Ответ:

$$x = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}} \right) = 0,31$$

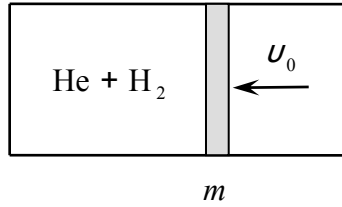
Задача 2 / 2. По гладкому горизонтальному льду могут скользить две одинаковые маленькие шайбы 1 и 2, соединённые жёстким невесомым стержнем. Стержень может свободно поворачиваться вокруг точек крепления к шайбам. Шайба 1 насажена на туго натянутую проволоку, вдоль которой она может двигаться без трения. В начальном положении стержень перпендикулярен проволоке, скорость \vec{V}_0 шайбы 1 направлена вдоль проволоки, а скорость шайбы 2 равна нулю. Найдите отношение $x = V_2/V_0$, где V_2 — скорость шайбы 2 в момент, когда угол между стержнем и проволокой $\alpha = 60^\circ$. Ответ округлите до сотых. Считайте, что стержень и проволока всё время горизонтальны; деформацию проволоки не учитывайте; шайбы считайте материальными точками.



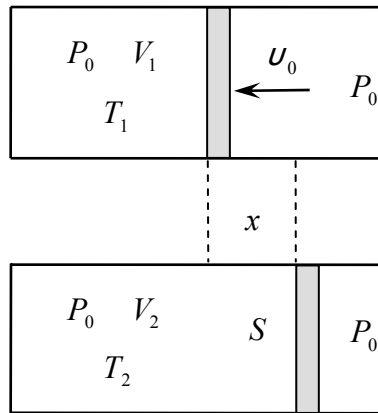
Ответ:

$$x = 0,46$$

Задача 3 / 1. Левый конец длинной горизонтальной трубы закрыт, а правый открыт в атмосферу. В трубе может двигаться без трения поршень массой $m = 2,8$ кг. Между поршнем и левым концом трубы находится однородная газовая смесь, состоящая из гелия и водорода H_2 , взятых в количестве $\nu = 0,08$ моля каждый. Сначала поршень неподвижен, газовая смесь находится при атмосферном давлении. Коротким ударом поршню сообщили некоторую скорость v_0 . После прекращения движения поршня температура газовой смеси повысилась на $\Delta T = 1$ К. Найдите начальную скорость поршня v_0 . Стенки трубы и поршень не проводят тепло, атмосферное давление постоянно, газы идеальные. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль К). Ответ выразите в м/с и округлите до десятых.



Возможное решение



В начальном состоянии имеем 2ν молей газовой смеси при атмосферном давлении P_0 и температуре T_1 . Объём смеси равен V_1 . В конечном состоянии давление смеси также равно P_0 , температура $T_2 = T_1 + \Delta T$. Так как температура повысилась, а давление не изменилось, конечный объём смеси V_2 больше, чем V_1 , то есть поршень сместился вправо. Обозначим через x смещение поршня и через S его площадь. Запишем первое начало термодинамики для газовой смеси:

$$0 = \frac{3}{2} \nu R \Delta T + \frac{5}{2} \nu R \Delta T + A.$$

Здесь A — работа силы давления смеси на поршень. Запишем теперь уравнение баланса энергии для поршня:

$$0 - \frac{mv_0^2}{2} = A + A_0.$$

В левой части имеем приращение механической энергии поршня, в правой — сумму работ сил, действующих на поршень. A_0 — работа постоянной силы атмосферного давления $P_0 S$:

$$A_0 = -P_0 Sx = -P_0 (V_2 - V_1) = -P_0 V_2 + P_0 V_1 = -2\nu R T_2 + 2\nu R T_1 = -2\nu R \Delta T.$$

Для работы силы давления газовой смеси на поршень получаем:

$$A = -\frac{mv_0^2}{2} - A_0 = -\frac{mv_0^2}{2} + 2\nu R \Delta T.$$

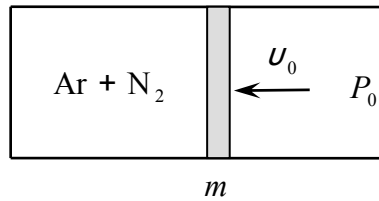
Подставляя этот результат в первое начало термодинамики, находим скорость v_0 :

$$v_0 = \sqrt{\frac{12 \nu R \Delta T}{m}} = 1,7 \text{ м/с}$$

Ответ:

$$v_0 = \sqrt{\frac{12 \nu R \Delta T}{m}} = 1,7 \text{ м/с}$$

Задача 3 / 2. Левый конец длинной горизонтальной трубы закрыт, а правый открыт в атмосферу. В трубе может двигаться без трения поршень массой $m = 3,4$ кг. Между поршнем и левым концом трубы находится однородная газовая смесь, состоящая из аргона и азота N_2 , взятых в одинаковом количестве молей. Сначала поршень неподвижен, газовая смесь находится при атмосферном давлении $P_0 = 0,1$ МПа. Коротким ударом поршню сообщили скорость $v_0 = 2,6$ м/с. Найдите, на какую величину ΔV увеличился объём газовой смеси после прекращения движения поршня. Ответ выразите в кубических сантиметрах и округлите до целого значения. Стенки трубы и поршень не проводят тепло, атмосферное давление постоянно, газы идеальные.



Ответ:

$$\Delta V = \frac{m v_0^2}{6 P_0} = 38 \text{ см}^3$$

Задача 4 / 1. В закрытом с обоих концов откачанном горизонтальном цилиндре объёмом $V = 12$ л может двигаться без трения тонкий поршень. В пространство слева от поршня вводят $\nu_1 = 0,4$ моля воды, справа $\nu_2 = 0,7$ моля азота и нагревают всю систему до температуры $T = 403$ К. Найдите отношение x объёма водяного пара V_1 к объёму азота V_2 при этой температуре: $x = V_1/V_2$. Давление насыщенного пара при температуре T равно $P_0 = 270$ кПа, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль К). Объёмом воды по сравнению с объёмом пара пренебрегите, пар и азот считайте идеальными газами. Ответ округлите до сотых.

Возможное решение

пар	азот
$P \quad V_1$	$P \quad V_2$
T	T

Выясним, будет ли пар в конечном состоянии насыщенным. Предположим, что нет. В этом случае вся вода испарилась и слева от поршня имеется ν_1 молей ненасыщенного пара. Найдём конечное давление P пара и азота. С учётом равенства $V_1 + V_2 = V$ получаем:

$$P V_1 = \nu_1 R T, \quad P V_2 = \nu_2 R T \quad \rightarrow \quad P = \frac{(\nu_1 + \nu_2) R T}{V} = 307 \text{ кПа}$$

Это значение больше, чем давление P_0 насыщенного пара при температуре T . Поэтому исходное предположение ошибочно и пар в конечном состоянии будет насыщенным (не вся вода испарится). В этом случае давление пара и азота равно P_0 . Для объёмов получаем:

$$V_2 = \frac{\nu_2 R T}{P_0}, \quad V_1 = V - V_2,$$

$$x = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V}{V_2} - 1 = \frac{P_0 V}{\nu_2 R T} - 1 = 0,38$$

Ответ:

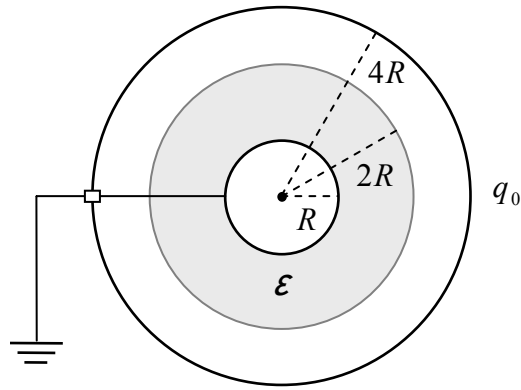
$$x = \frac{P_0 V}{\nu_2 R T} - 1 = 0,38$$

Задача 4 / 2. В закрытом с обоих концов откачанном горизонтальном цилиндре объёмом $V = 9$ л может двигаться без трения тонкий поршень. В пространство слева от поршня вводят $\nu_1 = 0,2$ моля воды, справа $\nu_2 = 0,5$ моля гелия и нагревают всю систему до температуры $T = 417$ К. Найдите объём водяного пара при этой температуре. Давление насыщенного пара при температуре T равно $P_0 = 404$ кПа, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль К). Объёмом воды по сравнению с объёмом пара пренебрегите, пар и азот считайте идеальными газами. Ответ выразите в литрах и округлите до десятых.

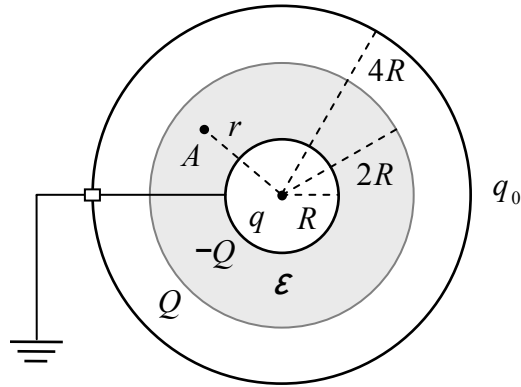
Ответ:

$$V_1 = \frac{V \nu_1}{\nu_1 + \nu_2} = 2,6 \text{ л}$$

Задача 5 / 1. Металлический шар радиуса R окружён concentрической проводящей сферой радиуса $4R$. К шару прилежит сферический слой твёрдого однородного диэлектрика с проницаемостью $\epsilon = 3$. Внешний радиус слоя равен $2R$. Шар заземляют (заземляющий провод не касается сферы), а сфере сообщают заряд $q_0 = -4,5$ нКл. Найдите установившийся заряд шара q . Ответ выразите в нанокюлонах и округлите до десятых.



Возможное решение



В электрическом поле шара диэлектрик поляризуется. На его внутренней поверхности возникает некоторый заряд $-Q$. В силу электронейтральности диэлектрика, заряд на его внешней поверхности равен Q . Для того чтобы найти этот заряд, рассмотрим в диэлектрике некоторую точку A , лежащую на расстоянии r от центра шара. Напряжённость электрического поля в этой точке равна:

$$E = \frac{kq}{\epsilon r^2}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Физической причиной ослабления поля в диэлектрике является наличие поляризационных зарядов, действие которых частично компенсирует электрическое поле шара. Поэтому заменим диэлектрический слой двумя сферами, совпадающими с границами диэлектрика. Внутренняя сфера имеет радиус R и несёт заряд $-Q$, внешняя — радиус $2R$ и заряд Q . Тогда для напряжённости поля в точке A имеем:

$$E = \frac{kq}{r^2} - \frac{kQ}{r^2} = \frac{k(q-Q)}{r^2}.$$

Приравнявая два выражения для E , находим заряд Q :

$$\frac{kq}{\epsilon r^2} = \frac{k(q-Q)}{r^2} \quad \rightarrow \quad \frac{q}{\epsilon} = q - Q \quad \rightarrow \quad Q = \frac{q(\epsilon - 1)}{\epsilon}.$$

Потенциал шара равен:

$$\varphi = \frac{k(q-Q)}{R} + \frac{kQ}{2R} + \frac{kq_0}{4R} = \frac{k(2q(\epsilon + 1) + \epsilon q_0)}{4\epsilon R}.$$

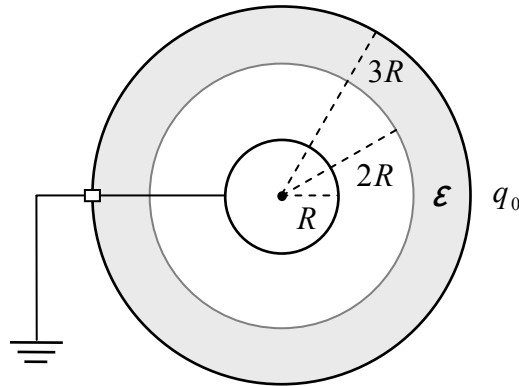
Так как шар заземлён, его потенциал равен нулю. Отсюда находим заряд шара q :

$$q = \frac{-\varepsilon q_0}{2(\varepsilon + 1)} = 1,7 \text{ нКл}$$

Ответ:

$$q = \frac{-q_0 \varepsilon}{2(\varepsilon + 1)} = 1,7 \text{ нКл}$$

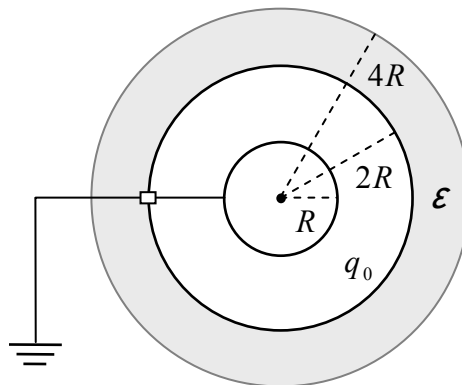
Задача 5 / 2. Металлический шар радиуса R окружён концентрической проводящей сферой радиуса $3R$. К сфере прилежит слой твёрдого однородного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 2$. Внутренний радиус слоя равен $2R$. Шар заземляют (заземляющий провод не касается сферы), а сфере сообщают заряд $q_0 = -7,2$ нКл. Найдите установившийся заряд шара q . Ответ выразите в нанокюлонах и округлите до десятых.



Ответ:

$$q = \frac{-2 q_0 \varepsilon}{5 \varepsilon + 1} = 2,6 \text{ нКл}$$

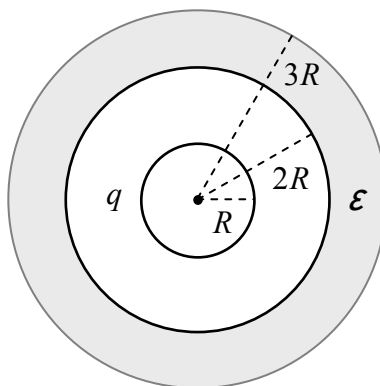
Задача 5 / 3. Металлический шар радиуса R окружён концентрической проводящей сферой радиуса $2R$. К сфере прилежит слой твёрдого однородного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 2$. Внешний радиус слоя равен $4R$. Шар заземляют (заземляющий провод не касается сферы), а сфере сообщают заряд $q_0 = -1,7$ нКл. Найдите установившийся заряд шара q . Ответ выразите в нанокюлонах и округлите до сотых.



Ответ:

$$q = \frac{-q_0 (\varepsilon + 1)}{3 \varepsilon + 1} = 0,73 \text{ нКл}$$

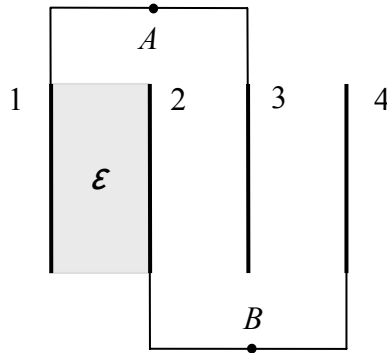
Задача 5 / 4. Металлический шар радиуса $R = 5$ см окружён концентрической проводящей сферой радиуса $2R$. К сфере прилегает слой твёрдого однородного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 4$. Внешний радиус слоя равен $3R$. Шару сообщают заряд $q = 0,5$ нКл и соединяют его со сферой тонким проводом. Найдите установившийся потенциал шара φ . Ответ выразите в вольтах и округлите до целого значения. Считайте, что $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.



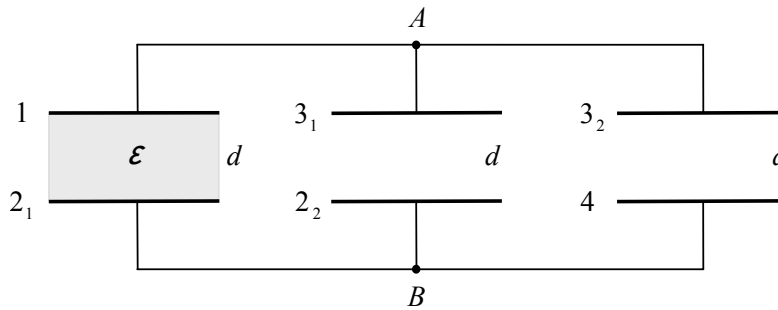
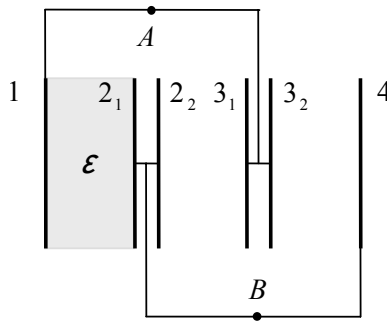
Ответ:

$$\varphi = \frac{kq(2\varepsilon + 1)}{6\varepsilon R} = 34 \text{ В}$$

Задача 6 / 1. Конденсатор состоит из четырёх одинаковых тонких металлических пластин, расположенных параллельно друг другу на равных расстояниях. Пластины 1 и 3 соединены тонким проводом и образуют одну из обкладок конденсатора. Другая обкладка — пластины 2 и 4, также соединённые проводом. Всё пространство между пластинами 1 и 2 заполнено твёрдым однородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 2,7$. Конденсатор подключён к батарее за точки A и B . Найдите отношение x зарядов пластин 3 и 1: $x = q_3 / q_1$. Ответ округлите до сотых. Краевые эффекты не учитывайте.



Возможное решение



Мысленно разделим пластину 2 на две параллельные пластины 2_1 и 2_2 , соединённые коротким проводом. Пластины 3 также разделим на две соединённые между собой пластины 3_1 и 3_2 . При подключении конденсатора к батарее пластины 2_1 , 2_2 и 4 имеют одинаковый потенциал. Потенциал пластин 1, 3_1 и 3_2 также одинаков. Поэтому исходный конденсатор можно заменить эквивалентной системой из трёх плоских конденсаторов, соединённых параллельно. Предположим, что положительный полюс батареи подключен к точке A , а отрицательный к точке B . Пусть V — поданное напряжение, d — расстояние между пластинами, S — площадь пластин. В эквивалентной схеме ёмкость конденсаторов без диэлектрика равна:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d},$$

где ε_0 — электрическая постоянная. Ёмкость конденсатора с диэлектриком равна εC . Для зарядов пластин 3_1 и 3_2 имеем:

$$q_{31} = q_{32} = CV.$$

Заряд пластины 3 равен:

$$q_3 = q_{31} + q_{32} = 2CV.$$

Заряд пластины 1:

$$q_1 = \varepsilon CV.$$

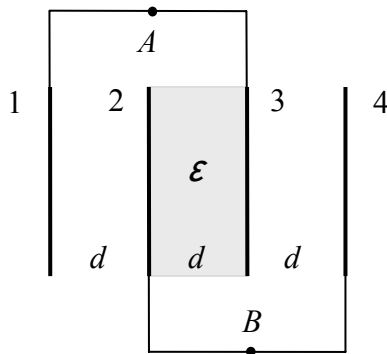
Отношение зарядов:

$$x = \frac{q_3}{q_1} = \frac{2}{\varepsilon} = 0,74$$

Ответ:

$$x = \frac{2}{\varepsilon} = 0,74$$

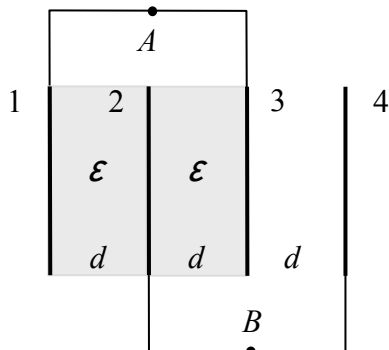
Задача 6 / 2. Конденсатор состоит из четырёх одинаковых тонких металлических пластин, расположенных параллельно друг другу на равных расстояниях. Площадь каждой пластины $S = 150 \text{ см}^2$, расстояние между пластинами $d = 3 \text{ мм}$. Пластины 1 и 3 соединены тонким проводом и образуют одну из обкладок конденсатора. Другая обкладка — пластины 2 и 4, также соединённые проводом. Всё пространство между пластинами 2 и 3 заполнено твёрдым однородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 4,5$. Конденсатор подключён к батарее за точки A и B (положительный полюс батареи подключён к точке A). Напряжение на конденсаторе $V = 12 \text{ В}$. Найдите заряд q_3 пластины 3. Ответ выразите в нанокулонах и округлите до десятых. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$. Краевые эффекты не учитывайте.



Ответ:

$$q_3 = \frac{\varepsilon_0 S V (\varepsilon + 1)}{d} = 2,9 \text{ нКл}$$

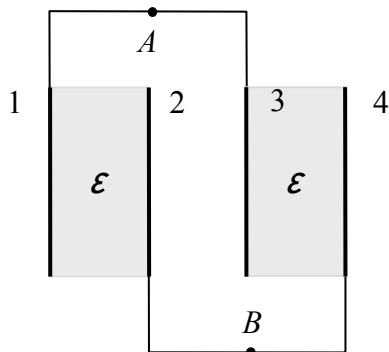
Задача 6 / 3. Конденсатор состоит из четырёх одинаковых тонких металлических пластин, расположенных параллельно друг другу на равных расстояниях. Площадь каждой пластины $S = 120 \text{ см}^2$, расстояние между пластинами $d = 2 \text{ мм}$. Пластины 1 и 3 соединены тонким проводом и образуют одну из обкладок конденсатора. Другая обкладка — пластины 2 и 4, также соединённые проводом. Всё пространство между пластинами 1, 2 и 3 заполнено твёрдым однородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 4$. Конденсатор подключён к батарее за точки A и B (положительный полюс батареи подключён к точке B). Напряжение на конденсаторе $V = 9 \text{ В}$. Найдите заряд q_2 пластины 2. Ответ выразите в нанокюлонах и округлите до десятых. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$. Краевые эффекты не учитывайте.



Ответ:

$$q_2 = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon S V}{d} = 3,8 \text{ нКл}$$

Задача 6 / 4. Конденсатор состоит из четырёх одинаковых тонких металлических пластин, расположенных параллельно друг другу на равных расстояниях. Пластины 1 и 3 соединены тонким проводом и образуют одну из обкладок конденсатора. Другая обкладка — пластины 2 и 4, также соединённые проводом. Всё пространство между пластинами 1, 2 и пластинами 3, 4 заполнено твёрдым однородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 2,1$. Конденсатор подключён к батарее за точки A и B . Найдите отношение x зарядов пластин 4 и 2: $x = q_4 / q_2$. Ответ округлите до сотых. Краевые эффекты не учитывайте.



Ответ:

$$x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} = 0,68$$