Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2021. Заключительный этап. 10 класс.

Задача 1. Маша написала на доске положительное число. Оказалось, что его целая часть на 43% меньше самого числа. Какое число написала Маша? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Целая часть числа — это наибольшее целое число, не превосходящее данное.

Решение. *Ответ:* $1\frac{43}{57}$.

Пусть $n \geqslant 0$ — целая часть числа Маши, а $0 \leqslant \epsilon < 1$ — его дробная часть. Само же число, соответственно, равно $n + \epsilon$.

Число n составляет 57% от числа $n + \epsilon$, что даёт уравнение $n = 0{,}57(n + \epsilon)$. Из него следует $0{,}43n = 0{,}57\epsilon$, что означает $\epsilon = \frac{43}{57}n$.

Если $n = 0$, то $\epsilon = 0$, но тогда число Маши — не положительное.

Если $n = 1$, то $\epsilon = \frac{43}{57}$, и число Маши равно $1\frac{43}{57} = \frac{100}{57}$ — ясно, что оно подходит.

Если же $n \geqslant 2$, то $\epsilon \geqslant \frac{43}{57} \cdot 2 > 1$, что невозможно.

Итак, единственный возможный вариант — число $1\frac{43}{57}$. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

3 б. Составлено уравнение вида $n = 0{,}57(n + \epsilon)$.

1 б. Есть верный ответ.

Задача 2. Числа d и e — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Могло ли так получиться, что a, b, c, d, e — это подряд идущие целые числа в некотором порядке?

Решение. *Ответ:* Да.

Такое получиться могло, например, для трёхчлена $2x^2 - 2$ и его корней 1 и -1. Числа $2, -1, 0, 1, 2$ как раз являются подряд идущими целыми числами. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Выписан любой пример, удовлетворяющий условию задачи.

Задача 3. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с прямым углом A ($BC \parallel AD$). Известно, что $BC = 1$, $AD = 4$. На стороне AB отмечена точка X, а на стороне CD — точка Y так, что $XY = 2$, $XY \perp CD$. Докажите, что описанная окружность треугольника XCD касается AB.

Решение. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке Z. Нетрудно заметить подобие трёх треугольников

$$\triangle ZBC \sim \triangle ZYX \sim \triangle ZAD,$$

откуда получается

$$\frac{ZC}{BC} = \frac{ZX}{XY} = \frac{ZD}{AD}.$$

Следовательно,

$$\frac{ZX}{ZC} = \frac{XY}{BC} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{AD}{XY} = \frac{ZD}{ZX};$$

$$ZX^2 = ZC \cdot ZD.$$

По теореме, обратной к теореме о квадрате касательной, описанная окружность XCD касается прямой AB. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

3 б. Построена точка Z и рассмотрена хотя бы одна пара подобных треугольников из решения задачи.

1 б. Построена точка Z, но дальнейших продвижений нет.

Задача 4. Пару натуральных чисел назовём *хорошей*, если одно из чисел делится нацело на другое. Числа от 1 до 30 разбили на 15 пар. Какое наибольшее количество хороших пар могло получиться?

Решение. Ответ: 13.

Сначала докажем, что больше 13 хороших пар получиться не могло. Назовём число *плохим*, если оно простое и не меньше 15. Есть всего четыре плохих числа: $17, 19, 23, 29$. Ни одно из остальных чисел от 1 до 30 не может делиться ни на одно плохое, а сами плохие числа могут делиться только на единицу (среди остальных). Следовательно, максимум одно из плохих чисел даст хорошую пару с единицей, а остальные минимум три плохих числа «испортят» минимум 2 пары.

Теперь рассмотрим такие 13 хороших пар: $(1, 27)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(5, 25)$, $(7, 21)$, $(8, 16)$, $(9, 18)$, $(10, 20)$, $(11, 22)$, $(12, 24)$, $(13, 26)$, $(14, 28)$, $(15, 30)$. Оставшиеся 4 числа разобьём на пары, например, так: $(17, 19)$, $(23, 29)$. Итого мы имеем ровно 13 хороших пар. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Построен пример, состоящий из 13 хороших пар.

3 б. Доказано, что хороших пар не более 13.

1 б. Есть идея рассмотрения «больших» простых чисел (17, 19, 23, 29), но дальнейших продвижений нет.

Задача 5. Петя и Вася играют в следующую игру. У них есть клетчатый прямоугольник 1000×2020, первым ходит Петя. Своим ходом первый игрок делит прямоугольник на два меньших одним разрезом вдоль линии сетки. Затем второй игрок выбирает один из двух получившихся прямоугольников, на котором будет продолжаться игра (второй прямоугольник отбрасывается), и делит его на два меньших. Потом опять первый выбирает прямоугольник, на котором будет продолжаться игра, и т. д. Проигрывает тот, кто не может в свой ход разрезать прямоугольник. Кто из игроков может всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

Решение. Ответ: Петя.

Докажем более общий факт: Петя имеет выигрышную стратегию только при таких m и n, у которых различается степень вхождения двойки в разложении на простые множители (соответственно, если степени вхождения двойки в m и n одинаковы, то выигрышная стратегия есть у Васи). Поскольку 1000 делится на 8, а 2020 не делится на 8, отсюда последует ответ задачи.

На каждом ходу стороны прямоугольника будем записывать следующим образом: $m = 2^a m_1$ и $n = 2^b n_1$, где m_1 и n_1 — нечётные числа; a и b — целые неотрицательные числа (стороны прямоугольника будем обозначать всегда m и n, в процессе игры они будут меняться). Ситуацию $a \neq b$ будем называть *хорошей*, а ситуацию $a = b$ — *плохой* (соответствующие прямоугольники будут также *хорошими* и *плохими*). Докажем, что в хорошей ситуации выигрышную стратегию имеет Петя, а в плохой — Вася.

Рассмотрим плохую ситуацию. Докажем, что как бы ни разделился прямоугольник в этом случае, соперник сможет выбрать себе такой прямоугольник, чтобы у него была хорошая ситуация. Предположим, получилось разрезать так, что оба получившихся прямоугольника плохие, т. е. они представимы в виде $2^a m_1 \times 2^a k$ и $2^a m_1 \times 2^a l$, где m_1, k, l — нечётные числа (не умаляя общности, разрезалась сторона n). Но тогда до разрезания сторона n прямоугольника равнялась $2^a(k+l)$, что делится на 2^{a+1}, т. к. k и l нечётны. Но начальная ситуация была плохой и длина стороны n делилась только на 2^a, противоречие.

Рассмотрим хорошую ситуацию. Не умаляя общности, пусть $a < b$. Скажем, что игрок в данной ситуации должен разделить прямоугольник на $2^a m_1 \times 2^a$ и $2^a m_1 \times 2^a(2^{b-a}n_1 - 1)$. Заметим, что все длины делятся на 2^a и не делятся на 2^{a+1}, поэтому, какой бы прямоугольник ни выбрал соперник, у него будет плохая ситуация.

Приведём стратегию для обоих игроков. Если у Пети хорошая ситуация, он должен разделить прямоугольник так, чтобы у Васи ситуация стала плохой (следовательно, когда он разделит прямоугольник, Петя вернёт себе хорошую ситуацию и продолжит действовать аналогично). В случае когда у Пети плохая ситуация, по такой же стратегии может действовать Вася. Получаем, что игрок, находящийся в хорошей ситуации, всегда может сделать ход и гарантировать, что на следующем его ходу ситуация будет хорошей. Осталось заметить, что с каждым ходом прямоугольник уменьшается, и игра обязательно закончится, а нельзя сделать разрез только в прямоугольнике 1×1, что является плохой ситуацией.

$\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 2 б. Присутствует идея представления длин сторон прямоугольника в виде чисел $2^n \cdot k$, где k — нечётное.
- 0 б. Есть верный ответ.