

Заключительный этап. 8 класс

Задача 1. V_1 литров воды и V_2 литров этанола смешивают друг с другом так, что объем их раствора равен $V = 1$ дм³ и что массовая доля этанола в растворе равна $p = 0,441$. Из-за протекания химических реакций при смешивании этих жидкостей происходит сжатие $\gamma = 6\%$, то есть объем полученного раствора на 6% меньше, чем суммарный объем воды и этанола $V_1 + V_2$. Найдите объемы V_1 и V_2 . Плотность воды $\rho_1 = 1000$ кг/м³, этанола $\rho_2 = 790$ кг/м³.

Возможное решение

Выразим массовую долю этанола через массу воды m_1 и массу этанола m_2 :

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0,441 \Rightarrow m_2 = 0,789m_1.$$

Запишем условие сжатия:

$$(V_1 + V_2) \cdot \frac{(100 - \gamma)}{100} = V \Rightarrow \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} = 1,064V.$$

Подставляя отношение масс жидкостей из первого уравнения во второе, выразим массу и объем воды:

$$m_1 = \frac{1,064V\rho_1\rho_2}{0,789\rho_1 + \rho_2} \Rightarrow V_1 = \frac{1,064V\rho_2}{0,789\rho_1 + \rho_2} = 532 \text{ см}^3.$$

Аналогично находим результат для объема этанола: $V_2 = 532 \text{ см}^3$.

Критерии

1. Выражена масса воды или этанола (+ 3 балла).
2. Найдены искомые объемы воды и этанола (+ 2 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 2. В черном ящике находится электрическая схема из трех резисторов и идеального амперметра, показания которого известны в любой момент времени. Кроме того, черный ящик имеет три выходных провода A , B и C . Если между выводами A и B приложено напряжение $U = 12$ В, то показания амперметра $I_{AB} = 2$ А. Если такое же напряжение приложить к выводам A и C , то показания $I_{AC} = 4$ А, а если к выводам B и C приложить то же $U = 12$ В, то $I_{BC} = 6$ А. Установите вид электрической схемы в черном ящике и найдите сопротивления резисторов.

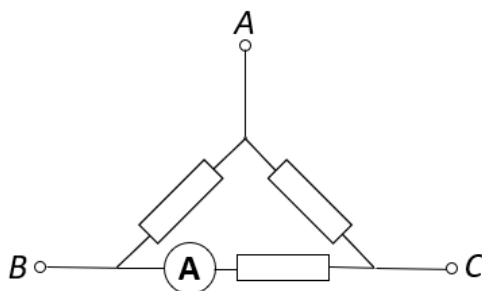
Возможное решение

Резисторы могут быть соединены либо в форме звезды, либо в форме треугольника. Амперметр нельзя подключать непосредственно между выходными клеммами, потому что тогда он перегорит после подачи напряжения на соответствующую пару проводов. Он также не может быть подключен параллельно ни с одним из резисторов, потому что тогда ток никогда не будет проходить через соответствующий резистор. Поэтому амперметр и резистор должны быть подключены последовательно.

В случае соединения в форме звезды амперметр, находящийся на одном луче, не будет показывать ток, если напряжение приложено к двум другим лучам звезды. Таким образом, в черном ящике может быть соединение только в форме треугольника.

Амперметр может находиться только на стороне BC треугольника. Так как в таком случае если напряжение приложено к выводам A и C или A и B , то к амперметру последовательно присоединяются два резистора, то есть суммарное сопротивление на этом участке больше, а тогда ток по нему течет меньше, тогда как по условию I_{BC} имеет наибольшее значение.

Верная схема изображена на рисунке.



Найдём значение сопротивления на стороне BC треугольного соединения: $R_{BC} = U/I_{BC} = 2$ Ом.

Когда к выводам A и B приложено напряжение, стороны AC и CB треугольника образуют последовательное соединение с амперметром. Тогда

$$R_{AC} + R_{BC} = U/I_{AB} = 6 \text{ Ом},$$

$$R_{AC} = 6 \text{ Ом} - 2 \text{ Ом} = 4 \text{ Ом}.$$

Аналогично

$$R_{AB} + R_{BC} = U/I_{AC} = 3 \text{ Ом},$$

$$R_{AB} = 3 \text{ Ом} - 2 \text{ Ом} = 1 \text{ Ом}.$$

Критерии

1. Определен тип совместного подключения резисторов (треугольник) (+ 2 балла).
2. Определено положение амперметра в цепи (+ 2 балла).
3. Верно найдены сопротивления резисторов (+ 1 балл).

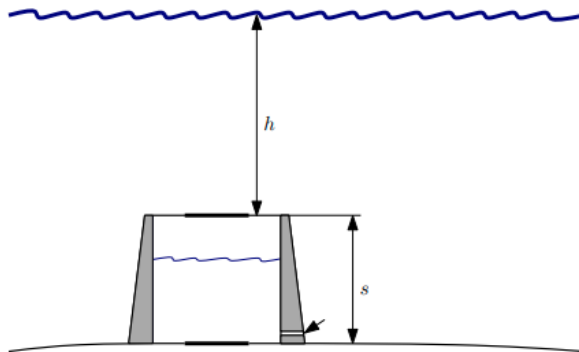
Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 3. Джеймс Бонд сбегает с подводной лодки через ее башню. Первоначально давление в башне такое же, как и давление воздуха на воду: $p_0 = 100$ кПа. После закрытия люка, отделяющего башню от остальной части подводной лодки, Бонд делает отверстие внутри стенки башни (см. рисунок), после чего башня частично заливается водой. Далее Бонд открывает потолочный люк и выплывает на поверхность с высвободившимся воздухом.

а) Какой толщины слой воздуха внутри башни до открытия потолочного люка и после того, как внутрь перестала поступать вода?

б) Насколько велика суммарная сила, приложенная к потолочному люку со стороны воздуха и воды до открытия люка и в течение времени, когда уровень воды внутри башни пришел в стабильное состояние?

Площадь люка $S = 0,50$ м², уровень воды над люком $h = 25$ м, высота башни $l = 2,0$ м. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³, ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с².



Возможное решение

Когда вода перестала поступать в башню, давление воздуха внутри башни стало равно гидростатическому давлению в башне на уровне воды. Из равновесия давлений можно выразить ширину воздушного слоя:

$$\rho g(h + d) + p_0 = p_0 \frac{l}{d},$$

$$d^2 \rho g + d(p_0 + h \rho g) - l p_0 = 0,$$

$$d = \frac{\pm \sqrt{(p_0 + h \rho g)^2 + 4 l \rho g p_0} - p_0 - h \rho g}{2 \rho g}.$$

Положительный корень уравнения равен $d \approx 57$ см. Так как снизу на люк действует давление воздуха внутри башни, соответствующее гидростатическому давлению на глубине $d + h$, получаем, что на люк действует сила, равная

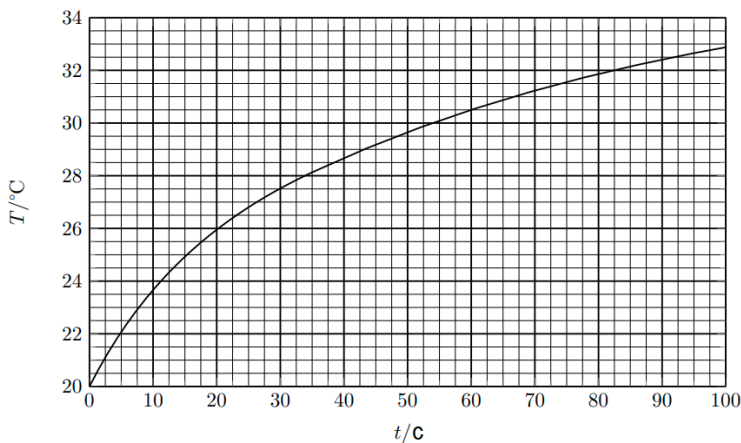
$$F = S(\rho g(d + h) + p_0 - \rho g h - p_0) = S \rho g d \approx 2800 \text{ Н}.$$

Критерии

1. Записано равновесие давлений (+ 1 балл).
2. Найдена толщина слоя воздуха (+ 2 балл).
3. Найдена суммарная сила F (+ 2 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 4. В водонагревателе мощностью $P = 2,0$ кВт изначально находится вода массы m_0 и температуры $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Водонагреватель включают, и в этот же момент вода с той же температурой $T_1 = 20^\circ\text{C}$ начинает поступать извне в нагреватель с постоянной скоростью, то есть масса поступающей извне воды в единицу времени постоянна и равна $\mu = \text{Const}$ (г/с). Когда нагреватель полностью наполняется водой, вода начинает вытекать из отверстия сверху. Температура вытекающей воды продолжает расти до установления на уровне 36°C . График изменения температуры воды, вытекающей из нагревателя, показан на рисунке. Найдите начальную массу воды m_0 и массу поступающей извне воды в единицу времени μ . Предположим, что, кроме вытекающей из нагревателя воды, потерь тепла нет, а вода в нагревателе всегда имеет одинаковую температуру. Удельная теплоемкость воды $c = 4,2$ кДж / (кг·К).



Возможное решение

Изначально температура поступившей извне воды равна температуре воды внутри водонагревателя и вода не вытекает. Поэтому температура воды изменяется только за счет тепла, полученного от нагревателя: $\Delta Q = cm_0\Delta T = P\Delta t$. Если момент времени Δt достаточно мал, то получим наклон $\Delta T/\Delta t \approx 0,45^\circ\text{C}/\text{с}$, который необходимо измерить на графике в момент времени $t = 0$. Наклон можно найти, проведя касательную на графике в начальный момент времени $t = 0$, которая примерно проходит через точку $T = 24,5^\circ\text{C}$ и $t = 10$ с. Откуда получаем

$$m_0 = \frac{P}{c \frac{\Delta T}{\Delta t}} \approx 1,1 \text{ кг.}$$

Стабильная температура достигается, когда энергия, необходимая для нагрева вытекающей в единицу времени воды, равна мощности нагревателя. Тогда мы получаем соотношение $P = \mu c(T - T_0)$. Подставляя температуру $T = 36^\circ\text{C}$, получим искомое значение μ :

$$\mu = \frac{P}{c(T - T_0)} \approx 30 \text{ г/с.}$$

Критерии

1. Найдено изменение температуры за малый промежуток времени (+ 2 балла).
2. Найдена масса воды (+ 1 балл).
3. Найден массовый расход в единицу времени (+ 2 балла).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 5. К потолку прикреплены 64 одинаковые пружины. Вторым концом все 64 пружин присоединены к невесомой доске. К этой доске с другой стороны прикреплены 32 такие же пружины, которые присоединены ко второй невесомой доске. Эту систему продолжали так, что на каждом следующем уровне было в два раза меньше пружин, пока в конце не осталась всего одна пружина. К ее свободному концу подвесили небольшой груз. Под весом этого груза система пружин немного растянулась. Определите, на сколько сантиметров растянулась система пружин от своего первоначального положения, если отношение массы груза к жесткости одной пружины равно $\frac{32}{127}$ кг·см/Н.

Возможное решение

Заметим, что система пружин состоит из семи уровней параллельно соединенных пружин. Пронумеруем уровни от 0 до 6, где меньший номер имеет уровень с одной пружиной. Тогда количество пружин на каждом из уровней равно 2^n , где n принимает значения от 0 до 6 в соответствии с номером уровня. Так как пружины одинаковые, пусть жесткость каждой из них равна k . Тогда выразим жесткость k_n уровня с номером n :

$$k_n = 2^n \cdot k.$$

Уровни между собой соединены последовательно, тогда жесткость K всей системы равна:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{k_6} + \frac{1}{k_5} + \dots + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_0} = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{k} \cdot \frac{127}{64} \Rightarrow K = \frac{64}{127}k.$$

Запишем условие равновесия, заменив общую систему пружин одной пружиной с жесткостью K :

$$K\Delta x = mg \Rightarrow \Delta x = \frac{mg}{K}.$$

Откуда

$$\Delta x = \frac{127}{64} \cdot \frac{m}{k} \cdot g = \frac{127}{64} \cdot \frac{32}{127} \cdot 10 = 5 \text{ см.}$$

Критерии

1. Правильно использовано параллельное соединение пружин (+ 1 балл).
2. Правильно использовано последовательное соединение пружин (+ 2 балла).
3. Посчитана жесткость всей системы пружин (+ 1 балл).
4. Получен правильный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.