8–9 классы

Задача 1/1. В одной из клеток доски 5×7 (5 строк, 7 столбцов) стоит фишка. За один ход можно передвинуть её на соседнюю по углу клетку, либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку влево. Какое наибольшее количество ходов можно сделать так, чтобы фишка не побывала ни в какой клетке дважды?

Ответ: 30.

Решение. Раскрасим все клетки таблицы в два цвета так, как показано на рис. 4.

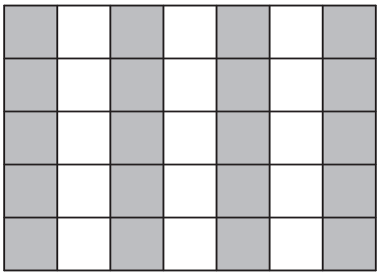

Рис. 4: к решению задачи 1/1

Заметим, что за один ход фишка «меняет свой цвет», то есть если она стояла на белой клетке, то она переходит на черную клетку, и наоборот. Следовательно, в любом маршруте фишки цвета будут чередоваться.

При этом всего есть 20 черных и 15 белых клеток. Таким образом, маршрут максимальной длины проходит не более чем по 31 клетке (16 черных и 15 белых).

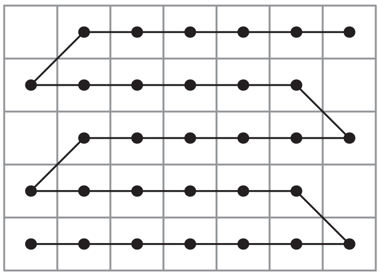

Рис. 5: к решению задачи 1/1

Пример маршрута из 31 клетки (т. е. из 30 ходов) приведен на рис 5. □

Задача 1/2. В одной из клеток доски 4×7 (4 строки, 7 столбцов) стоит фишка. За один ход можно передвинуть её на соседнюю по углу клетку, либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку влево. Какое наибольшее количество ходов можно сделать так, чтобы фишка не побывала ни в какой клетке дважды?

Ответ: 24.

Решение. Раскрасим все клетки таблицы в два цвета так, как показано на рис. 6.

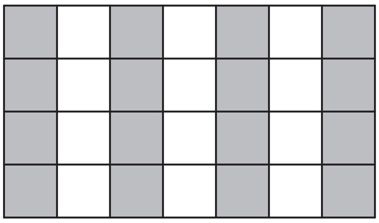

Рис. 6: к решению задачи 1/2

Заметим, что за один ход фишка «меняет свой цвет», то есть если она стояла на белой клетке, то она переходит на черную клетку, и наоборот. Следовательно, в любом маршруте фишки цвета будут чередоваться.

При этом всего есть 16 черных и 12 белых клеток. Таким образом, маршрут максимальной длины проходит не более, чем по 25 клеткам (13 черных и 12 белых).

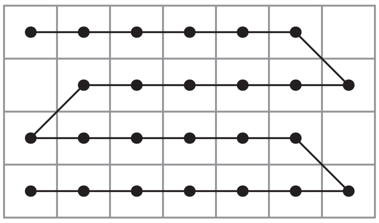

Рис. 7: к решению задачи 1/2

Пример маршрута из 25 клеток (т. е. из 24 ходов) приведен на рис 7. □

Задача 1/3. В одной из клеток доски 5×5 (5 строк, 5 столбцов) стоит фишка. За один ход можно передвинуть её на соседнюю по углу клетку, либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку влево. Какое наибольшее количество ходов можно сделать так, чтобы фишка не побывала ни в какой клетке дважды?

Ответ: 20.

Решение. Раскрасим все клетки таблицы в два цвета так, как показано на рис. 8.

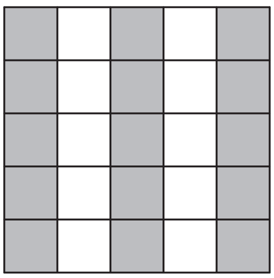

Рис. 8: к решению задачи 1/3

Заметим, что за один ход фишка «меняет свой цвет», то есть если она стояла на белой клетке, то она переходит на черную клетку, и наоборот. Следовательно, в любом маршруте фишки цвета будут чередоваться.

При этом всего есть 15 черных и 10 белых клеток. Таким образом, маршрут максимальной длины проходит не более чем по 21 клетке (11 черных и 10 белых).

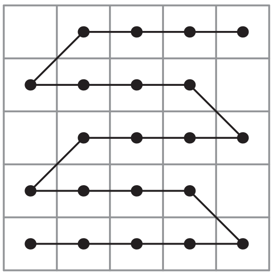

Рис. 9: к решению задачи 1/3

Пример маршрута из 21 клетки (т. е. из 20 ходов) приведен на рис 9. □

Задача 2/1. Малыш и Карлсон едят пряники с молоком. Малыш выпивает один стакан молока за некоторое целое число секунд, а Карлсон выпивает его в три раза медленее. При этом Малыш ест 5 пряников в минуту, а Карлсон 6 пряников в минуту. Одновременно есть пряники и пить молоко ни один из них не может. Спустя некоторое время они выпили по одинаковому количеству стаканов молока (каждый выпил больше одного стакана) и съели по 7 пряников. Сколько стаканов молока выпил Малыш?

Ответ: 7.

Решение. Малыш съедает один пряник за 12 секунд, то есть на 7 пряников у него ушло 84 секунды. Карлсон съедает пряник за 10 секунд, и у него на 7 пряников ушло 70 секунд. Пусть Малыш потратил на молоко x секунд; Карлсон тогда потратил $3x$. Суммарное время у них совпадает:

$$x + 84 = 3x + 70\,,$$

откуда получаем $14 = 2x$, то есть $x = 7$. Так как на каждый стакан у Малыша уходит целое число секунд, то он мог выпить либо один стакан, либо семь, так как 7 секунд не делятся ни на какие другие числа. Но по условию выпитых стаканов было больше одного, так что ответ — семь. □

Задача 2/2. Малыш и Карлсон едят пряники с молоком. Малыш выпивает один стакан молока за некоторое целое число секунд, а Карлсон выпивает его в четыре раза медленее. При этом Малыш ест 4 пряника в минуту, а Карлсон 5 пряников в минуту. Одновременно есть пряники и пить молоко ни один из них не может. Спустя некоторое время они выпили по одинаковому количеству стаканов молока (каждый выпил больше одного стакана) и съели по 5 пряников. Сколько стаканов молока выпил Малыш?

Ответ: 5.

Решение. Малыш съедает один пряник за 15 секунд, то есть на 5 пряников у него ушло 75 секунд. Карлсон съедает пряник за 12 секунд, и у него на 5 пряников ушло 60 секунд. Пусть Малыш потратил на молоко x секунд; Карлсон тогда потратил $4x$. Суммарное время у них совпадает:

$$x + 75 = 4x + 60\,,$$

откуда получаем $15 = 3x$, то есть $x = 5$. Так как на каждый стакан у Малыша уходит целое число секунд, то он мог выпить либо один стакан, либо пять, так как 5 секунд не делятся ни на какие другие числа. Но по условию выпитых стаканов было больше одного, так что ответ — пять. □

Задача 3/1. Обыкновенную дробь $\frac{1}{123}$ записали в виде бесконечной десятичной дроби. Затем из неё вычеркнули первую ненулевую цифру и получившееся число записали в виде несократимой обыкновенной дроби. Найдите знаменатель этой дроби.

Ответ: 3075.

Решение. Для начала определим первую ненулевую цифру после запятой. Для этого надо определить степень 10, большую 123. Заметим, что

$$10^3 = 8 \cdot 123 + 16.$$

Это означает, что первая ненулевая цифра стоит на третьем месте и равна 8. Когда мы вычеркнем цифру 8, то получим число, равное

$$10 \cdot \left(\frac{1}{123} - 0{,}008\right) = 10 \cdot \left(\frac{1}{123} - \frac{1}{125}\right) = \frac{20}{15375} = \frac{4}{3075}.$$

Таким образом, ответ равен 3075. □

Задача 3/2. Обыкновенную дробь $\frac{1}{147}$ записали в виде бесконечной десятичной дроби. Затем из неё вычеркнули первую ненулевую цифру и получившееся число записали в виде несократимой обыкновенной дроби. Найдите знаменатель этой дроби.

Ответ: 7350.

Решение. Для начала определим первую ненулевую цифру после запятой. Для этого надо определить степень 10, большую 147. Заметим, что

$$10^3 = 6 \cdot 147 + 118.$$

Это означает, что первая ненулевая цифра стоит на третьем месте и равна 6. Когда мы вычеркнем цифру 6, то получим число, равное

$$10 \cdot \left(\frac{1}{147} - 0{,}006\right) = 10 \cdot \left(\frac{1}{147} - \frac{3}{500}\right) = \frac{10}{147} - \frac{3}{50} = \frac{59}{7350}.$$

Таким образом, ответ равен 7350. □

Задача 3/3. Обыкновенную дробь $\frac{1}{138}$ записали в виде бесконечной десятичной дроби. Затем из неё вычеркнули первую ненулевую цифру и получившееся число записали в виде несократимой обыкновенной дроби. Найдите знаменатель этой дроби.

Ответ: 6900.

Решение. Для начала определим первую ненулевую цифру после запятой. Для этого надо определить степень 10, большую 138. Заметим, что

$$10^3 = 7 \cdot 138 + 34.$$

Это означает, что первая ненулевая цифра стоит на третьем месте и равна 7. Когда мы вычеркнем цифру 7, то получим число, равное

$$10 \cdot \left(\frac{1}{138} - 0{,}007\right) = 10 \cdot \left(\frac{1}{138} - \frac{7}{1000}\right) = \frac{5}{69} - \frac{7}{100} = \frac{17}{6900}.$$

Таким образом, ответ равен 6900. $\square$

Задача 4/1. Точка K — такая точка на стороне AD квадрата $ABCD$, что $KD : KA = 2$. Прямая, симметричная CD относительно CK, пересекает сторону AB в точке L. Найдите величину $5 \cdot AL : LB$.

Ответ: 7.

Решение. Пусть P — пересечение CL и AD. Обозначим сторону квадрата за 1,

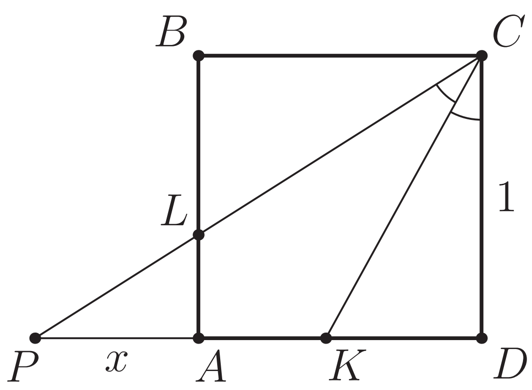

Рис. 10: к решению задачи 4/1

а отрезок AP за x (рис. 10). Тогда по свойству биссектрисы в треугольнике PCD получим, что $\frac{CP}{KP} = \frac{CD}{KD}$. Чтобы найти сторону PC, воспользуемся теоремой Пифагора для треугольника PCD:

$$CP^2 = PD^2 + CD^2 = (1+x)^2 + 1\,.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{1+(1+x)^2}}{\frac{1}{3}+x} = \frac{3}{2}\,.$$

Возводя это равенство в квадрат, получим, что

$$\frac{1+(1+x)^2}{(\frac{1}{3}+x)^2} = \frac{9}{4}\,.$$

Домножая на знаменатель, получаем уравнение

$$4(1+1+2x+x^2) = 9\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{3}x+x^2\right)\,;$$
$$8+8x+4x^2 = 1+6x+9x^2\,;$$
$$5x^2-2x-7=0\,;$$
$$x=\frac{7}{5} \quad \text{или} \quad x=-1\,.$$

Заметим, что корень $x=-1$ не имеет геометрического смысла, поэтому $x=\frac{7}{5}$.

Несложно заметить, что треугольники ALP и BLC подобны, откуда будет следовать, что $5\cdot AL:LB = 5\cdot CP:BC = 5x = 7$. □

Задача 4/2. Точка K — такая точка на стороне AD квадрата $ABCD$, что $KD:KA=3$. Прямая, симметричная CD относительно CK, пересекает сторону AB в точке L. Найдите величину $7\cdot AL:LB$.

Ответ: 17.

Решение. Пусть P — пересечение CL и AD. Обозначим сторону квадрата за 1,

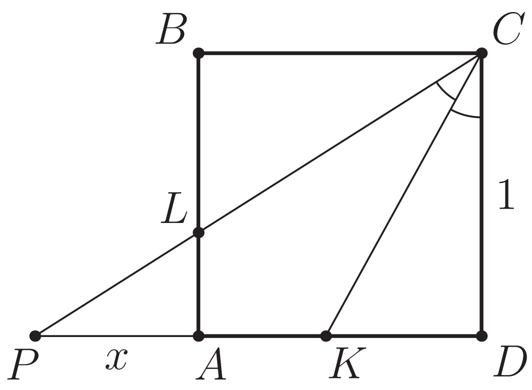

Рис. 11: к решению задачи 4/2

а отрезок AP за x (рис. 11). Тогда по свойству биссектрисы в треугольнике PCD получим, что $\frac{CP}{KP}=\frac{CD}{KD}$. Чтобы найти сторону PC, воспользуемся теоремой Пифагора для треугольника PCD:

$$CP^2 = PD^2 + CD^2 = (1+x)^2 + 1\,.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{1+(1+x)^2}}{\frac{1}{4}+x} = \frac{4}{3}\,.$$

Возводя это равенство в квадрат, получим, что

$$\frac{1+(1+x)^2}{(\frac{1}{4}+x)^2} = \frac{16}{9}\,.$$

Домножая на знаменатель, получаем уравнение

$$9(1+1+2x+x^2) = 16\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2}x+x^2\right)\,;$$
$$18+18x+9x^2 = 1+8x+16x^2\,;$$
$$9x^2-10x-17=0\,;$$
$$x=\frac{17}{7} \quad \text{или} \quad x=-1\,.$$

Заметим, что корень $x=-1$ не имеет геометрического смысла, поэтому $x=\frac{17}{7}$.

Несложно заметить, что треугольники ALP и BLC подобны, откуда будет следовать, что $7\cdot AL:LB = 7\cdot CP:BC = 7x = 17$. □

Задача 4/3. Точка K — такая точка на стороне AD квадрата $ABCD$, что $KD:KA=4$. Прямая, симметричная CD относительно CK, пересекает сторону AB в точке L. Найдите величину $9\cdot AL:LB$.

Ответ: 31.

Решение. Пусть P — пересечение CL и AD. Обозначим сторону квадрата за 1,

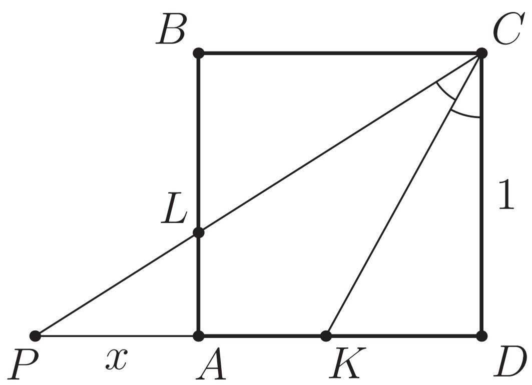

Рис. 12: к решению задачи 4/3

а отрезок AP за x (рис. 12). Тогда по свойству биссектрисы в треугольнике PCD получим, что $\frac{CP}{KP}=\frac{CD}{KD}$. Чтобы найти сторону PC, воспользуемся теоремой Пифагора для треугольника PCD:

$$CP^2 = PD^2+CD^2 = (1+x)^2+1\,.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{1+(1+x)^2}}{\frac{1}{5}+x} = \frac{5}{4}\,.$$

Возводя это равенство в квадрат, получим что

$$\frac{1+(1+x)^2}{(\frac{1}{5}+x)^2} = \frac{25}{16}\,.$$

Домножая на знаменатель, получаем уравнение

$$16(1+1+2x+x^2) = 25\left(\frac{1}{25}+\frac{2}{5}x+x^2\right)\,;$$
$$32+32x+16x^2 = 1+10x+25x^2\,;$$
$$9x^2-22x-31=0\,;$$
$$x=\frac{31}{9}\quad\text{или}\quad x=-1\,.$$

Заметим, что корень $x=-1$ не имеет геометрического смысла, поэтому $x = \frac{31}{9}$. Несложно заметить, что треугольники ALP и BLC подобны, откуда будет следовать, что $9\cdot AL : LB = 9\cdot CP : BC = 9x = 31$. □

Задача 5/1. По кругу записаны 268 целых чисел таким образом, что сумма любых 20 последовательных из них равна 75. Числа 3, 4 и 9 записаны на позициях с номерами 17, 83 и 144 соответственно. Какое число записано на позиции с номером 210?

Ответ: -1.

Решение. Заметим, что поскольку сумма любых 20 последовательных чисел постоянна, то числа, отстоящие друг от друга на 20 позиций, равны между собой. Поскольку $268 = 20\cdot 13+8$, то, «прибавляя» каждый раз по 20, получим, что числа, отстоящие друг от друга на 8, также равны между собой. Далее, аналогично используя $268 = 8\cdot 33+4$, получим, что числа, отстоящие друг от друга на 4, равны между собой. Таким образом, числа, порядковые номера которых дают один остаток при делении на 4, равны между собой.

Теперь рассмотрим произвольные 20 последовательных чисел. Они состоят из 5 «блоков» длины 4, содержащих все числа. Таким образом, сумма этих четырех чисел равна $75:5=15$. Заметим, что числа 17, 83, 144 и 210 имеют различные остатки при делении на 4, поэтому на этих позициях стоят различные числа. Таким образом, на 210-м месте стоит число $15-(4+3+9)=-1$. □

Задача 5/2. По кругу записаны 148 целых чисел таким образом, что сумма любых 20 последовательных из них равна 90. Числа 3, 4 и -5 записаны на позициях с номерами 41, 19 и 84 соответственно. Какое число записано на позиции с номером 146?

Ответ: 16.

Решение. Заметим, что поскольку сумма любых 20 последовательных чисел постоянна, то числа, отстоящие друг от друга на 20 позиций, равны между собой. Поскольку $148 = 20\cdot 7+8$, то, «прибавляя» каждый раз по 20, получим, что числа, отстоящие друг от друга на 8, также равны между собой. Далее, аналогично используя $148 = 8 \cdot 18 + 4$, получим, что числа, отстоящие друг от друга на 4, равны между собой. Таким образом, числа, порядковые номера которых дают один остаток при делении на 4, равны между собой.

Теперь рассмотрим произвольные 20 последовательных чисел. Они состоят из 5 «блоков» длины 4, содержащих все числа. Таким образом, сумма этих четырех чисел равна $90 : 5 = 18$. Заметим, что числа 41, 19, 84 и 146 имеют различные остатки при делении на 4, поэтому на этих позициях стоят различные числа. Таким образом, на 146-м месте стоит число $18 - (3 + 4 - 5) = 16$. ☐

Задача 5/3. По кругу записаны 308 целых чисел таким образом, что сумма любых 20 последовательных из них равна 65. Числа 7, 3 и 6 записаны на позициях с номерами 61, 103 и 204 соответственно. Какое число записано на позиции с номером 10?

Ответ: -3.

Решение. Заметим, что поскольку сумма любых 20 последовательных чисел постоянна, то числа, отстоящие друг от друга на 20 позиций, равны между собой. Поскольку $308 = 20 \cdot 15 + 8$, то, «прибавляя» каждый раз по 20, получим, что числа, отстоящие друг от друга на 8, также равны между собой. Далее, аналогично используя $308 = 8 \cdot 38 + 4$, получим, что числа, отстоящие друг от друга на 4, равны между собой. Таким образом, числа, порядковые номера которых дают один остаток при делении на 4, равны между собой.

Теперь рассмотрим произвольные 20 последовательных чисел. Они состоят из 5 «блоков» длины 4, содержащих все числа. Таким образом, сумма этих четырех чисел равна $65 : 5 = 13$. Заметим, что числа 61, 103, 204 и 10 имеют различные остатки при делении на 4, поэтому на этих позициях стоят различные числа. Таким образом, на 10-м месте стоит число $13 - (7 + 3 + 6) = -3$. ☐

Задача 6/1. Сколько существует натуральных n таких, что $100 < n < 20000$, и n можно представить в виде $\text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(b, c) + \text{НОК}(c, a)$ с натуральными a, b, c?

Ответ: 19891.

Решение. Представим число n в виде $2^k \cdot m$, где m — нечетное число. Если $m > 1$, то возьмем $a = 2^k \cdot \frac{m-1}{2}$, $b = c = 2^k$. Получается

$$\begin{aligned} &\text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(b, c) + \text{НОК}(c, a) = \\ &\quad = \text{НОК}(2^k \cdot \tfrac{m-1}{2}, 2^k) + \text{НОК}(2^k, 2^k) + \text{НОК}(2^k, 2^k \cdot \tfrac{m-1}{2}) = \\ &\quad = 2^k \cdot \frac{m-1}{2} + 2^k + 2^k \cdot \frac{m-1}{2} = 2^k \cdot m\,. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $n = 2^k$. Пусть $a = 2^\alpha \cdot a_1$, $b = 2^\beta \cdot b_1$, $c = 2^\gamma \cdot c_1$, где a_1, b_1, c_1 — нечетные числа; без ограничения общности будем считать $\alpha \leqslant$

$\beta \leqslant \gamma$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(b, c) + \text{НОК}(c, a) = \\
&\quad = \text{НОК}(2^\alpha \cdot a_1, 2^\beta \cdot b_1) + \text{НОК}(2^\beta \cdot b_1, 2^\gamma \cdot c_1) + \text{НОК}(2^\gamma \cdot c_1, 2^\alpha \cdot a_1) = \\
&\quad = 2^\beta \cdot \text{НОК}(a_1, b_1) + 2^\gamma \cdot \text{НОК}(b_1, c_1) + 2^\gamma \cdot \text{НОК}(c_1, a_1) = 2^k\,.
\end{aligned}$$

Получается

$$\text{НОК}(a_1, b_1) + 2^{\gamma-\beta} \cdot \text{НОК}(b_1, c_1) + 2^{\gamma-\beta} \cdot \text{НОК}(c_1, a_1) = 2^{k-\beta}\,.$$

Если $\gamma = \beta$, то в левой части сумма трех нечетных слагаемых, а в правой четное число. Противоречие.

Если $\gamma > \beta$, то в левой части сумма четного и двух нечетных слагаемых, а в правой четное число. Противоречие.

То есть нам подходят все числа из промежутка, кроме степеней двойки.

Заметим, что $100 < 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}, 2^{13}, 2^{14} < 20000$.

Получаем ответ $20000 - 1 - 100 - 8 = 19891$. □

Задача 6/2. Сколько существует натуральных n таких, что $150 < n < 15000$, и n можно представить в виде $\text{НОК}(a, b)+\text{НОК}(b, c)+\text{НОК}(c, a)$ с натуральными a, b, c?

Ответ: 14843.

Решение. Представим число n в виде $2^k \cdot m$, где m — нечетное число. Если $m > 1$, то возьмем $a = 2^k \cdot \frac{m-1}{2}$, $b = c = 2^k$. Получается

$$\begin{aligned}
&\text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(b, c) + \text{НОК}(c, a) = \\
&\quad = \text{НОК}(2^k \cdot \tfrac{m-1}{2}, 2^k) + \text{НОК}(2^k, 2^k) + \text{НОК}(2^k, 2^k \cdot \tfrac{m-1}{2}) = \\
&\quad = 2^k \cdot \frac{m-1}{2} + 2^k + 2^k \cdot \frac{m-1}{2} = 2^k \cdot m\,.
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $n = 2^k$. Пусть $a = 2^\alpha \cdot a_1$, $b = 2^\beta \cdot b_1$, $c = 2^\gamma \cdot c_1$, где a_1, b_1, c_1 — нечетные числа; без ограничения общности будем считать $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(b, c) + \text{НОК}(c, a) = \\
&\quad = \text{НОК}(2^\alpha \cdot a_1, 2^\beta \cdot b_1) + \text{НОК}(2^\beta \cdot b_1, 2^\gamma \cdot c_1) + \text{НОК}(2^\gamma \cdot c_1, 2^\alpha \cdot a_1) = \\
&\quad = 2^\beta \cdot \text{НОК}(a_1, b_1) + 2^\gamma \cdot \text{НОК}(b_1, c_1) + 2^\gamma \cdot \text{НОК}(c_1, a_1) = 2^k\,.
\end{aligned}$$

Получается

$$\text{НОК}(a_1, b_1) + 2^{\gamma-\beta} \cdot \text{НОК}(b_1, c_1) + 2^{\gamma-\beta} \cdot \text{НОК}(c_1, a_1) = 2^{k-\beta}\,.$$

Если $\gamma = \beta$, то в левой части сумма трех нечетных слагаемых, а в правой четное число. Противоречие.

Если $\gamma > \beta$, то в левой части сумма четного и двух нечетных слагаемых, а в правой четное число. Противоречие.

То есть нам подходят все числа из промежутка, кроме степеней двойки.

Заметим, что $150 < 2^8, 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}, 2^{13} < 15000$.

Получаем ответ $15000 - 1 - 150 - 6 = 14843$. $\square$