Олимпиада «Курчатов» / 2017

Содержание

Условия задач с решениями и критериями

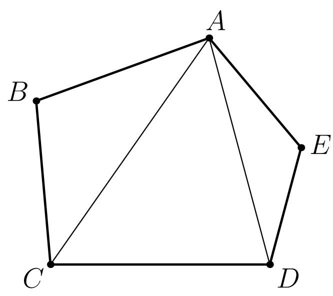
Интернет-тур

6–7 класс

1. Найдите самое маленькое восьмизначное число, в записи которого используются только четные цифры, причем каждая четная цифра используется хотя бы один раз.

2. В многоквартирном доме Статграда несколько подъездов с одинаковым количеством квартир. Известно, что квартиры 337 и 364 находятся в одном подъезде, а квартиры 504 и 533 — в разных подъездах, причем не в соседних. Сколько квартир в каждом подъезде?

3. Пятиугольник $ABCDE$ с периметром 30 см разрезан двумя диагоналями AC и AD на три треугольника с периметрами 20 см каждый. Найдите длину стороны CD. Ответ выразите в сантиметрах.



4. Трехзначное натуральное число N с тремя различными цифрами называется *удачным,* если оно равно среднему арифметическому всех чисел, полученных из него перестановкой цифр. Например, число $N = 481$ удачно, так как является средним арифметическим чисел 418, 481, 148, 184, 814 и 841. Найдите наибольшее удачное число. (Для того, чтобы посчитать среднее арифметическое нескольких чисел, надо сумму этих чисел поделить на их количество.)

5. Некто взял 2017 листов бумаги, на каждом из которых написал $+1$ или -1, и разложил их по 2017 конвертам. Вы можете указать на произвольные три конверта и узнать произведение чисел, находящихся внутри этих конвертов. За какое наименьшее число вопросов можно гарантированно узнать произведение всех чисел?

6. Вася принял решение в течение семи недель заниматься математикой. Первая неделя начинается в понедельник первого сентября. Вася не готов заниматься более одного раза в неделю или более одного раза в один и тот же день недели (т. е., например, два занятия не могут приходится на два вторника); занятия должны проходить только по четным числам. Сколькими способами он может организовать себе серию из 6 занятий?

8–9 класс

1. Из числа $\underbrace{20172017\ldots2017}_{100\text{ раз по «2017»}}$ вычеркнули 100 цифр так, чтобы оставшееся число было максимальным. Какая цифра стоит на сотом месте (если считать слева) у результата?

2. Выражения

$$A = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \ldots + 99 \cdot 100 + 101$$

и

$$B = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + \ldots + 98 \cdot 99 + 100 \cdot 101$$

получены вписыванием чередующихся знаков сложения и умножения в последовательности натуральных чисел $1, 2, \ldots, 101$. Найдите $B - A$.

3. Лёша внимательно наблюдает за часами и отслеживает *счастливые* моменты, когда минутная и часовая стрелка образуют угол в 66°. Каков минимальный по продолжительности промежуток времени между двумя счастливыми моментами? Ответ выразите в минутах.

4. Петя принял решение в течение семи недель заниматься физикой. Первая неделя начинается в понедельник первого сентября. Петя не готов заниматься более одного раза в неделю или более одного раза в один и тот же день недели (т. е., например, два занятия не могут приходится на два вторника); занятия должны проходить только по нечетным числам. Сколькими способами он может организовать себе серию из 6 занятий?

5. Точки E и F являются серединами оснований AD и BC трапеции $ABCD$. Оказалось, что $AC = 8$ см, $BD = 6$ см и $EF = 5$ см. Найдите площадь трапеции $ABCD$ в квадратных сантиметрах.

6. В вершинах правильного n-угольника расставлены числа от 1 до n в некотором порядке. При этом расстояния между вершинами, в которых стоят последовательные числа, одинаковые. Такое же расстояние между вершинами, в которых стоят числа 1 и n. Оказалось, что вершина с числом 13 соседствует с вершинами, соответствующими числам 54 и 31. Найдите n.

10–11 класс

1. Выражения

$$A = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \ldots + 2015 \cdot 2016 + 2017$$

и

$$B = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + \ldots + 2014 \cdot 2015 + 2016 \cdot 2017$$

получены вписыванием чередующихся знаков сложения и умножения в последовательности натуральных чисел $1, 2, \ldots, 2017$. Найдите $B - A$.

2. Леша внимательно наблюдает за часами и отслеживает *счастливые* моменты, когда минутная и часовая стрелка образуют угол в $125°$. Каков минимальный по продолжительности промежуток времени между двумя счастливыми моментами? Ответ выразите в минутах.

3. Сколько действительных решений имеет уравнение $2x = \sin(2017\pi x)$?

4. В физико-математическом конкурсе предлагается 20 задач по математике и 17 по физике. Каждый из школьников, участвующих в конкурсе, выбрал пару задач: одну по математике и одну по физике. При этом для каждого школьника хотя бы одна из выбранных им задач выбрана не более чем одним другим школьником. Какое максимальное количество школьников могло участвовать в конкурсе?

5. В вершинах правильного n-угольника расставлены числа от 1 до n в некотором порядке. При этом расстояния между вершинами, в которых стоят последовательные числа, одинаковые. Такое же расстояние между вершинами, в которых стоят числа 1 и n. Оказалось, что вершина с числом 20 соседствует с вершинами, соответствующими числам 158 и 45. Найдите n.

6. Тетраэдр $ABCD$ таков что $\angle BAD = 60°$, $\angle BAC = 40°$, $\angle ABD = 80°$, и угол между ребрами AB и CD равен $90°$. Найдите $\angle ABC$. Ответ выразите в градусах.

Статград

6–7 класс

1. Есть два бумажных прямоугольных треугольника, красный и зеленый. У красного углы равны 30°, 60° и 90°, а у зеленого — 45°, 45° и 90°. Требуется разрезать каждый треугольник на два треугольника меньшего размера и образовать две пары разноцветных треугольников так, чтобы в каждой паре треугольники имели одинаковые наборы углов. Как это сделать?

2. За большим круглым столом расселись 16 человек: рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый заявил, что оба его соседа — лжецы. Какое наименьшее количество рыцарей за столом могло быть?

3. Сколько раз встречается цифра 1 в десятичной записи числа

$$9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots99}_{2017 \text{ раз «9»}} \quad ?$$

4. На ста карточках написаны числа от 1 до 200. На каждой карточке по два числа: одно четное и одно нечетное, отличающиеся на 1. Вася выбрал 21 карточку. Могла ли сумма 42-х чисел на них оказаться равна 2017?

8–9 класс

1. Карина и Петя вместе шли на олимпиаду по ОБЖ со скоростью 6 км/ч. В 9:30 Петя вспомнил, что он оставил дома включенный утюг, и побежал назад со скоростью 10 км/ч; добравшись до дома, он немедленно выключил утюг и побежал с той же скоростью догонять Карину (которая продолжала всё это время идти с неизменной скоростью). В 10:00 они встретились снова. В какой момент времени Петя выключил утюг?

2. Сколько раз встречается цифра 1 в десятичной записи числа

$$9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots99}_{2017 \text{ раз «9»}} \quad ?$$

3. Пусть $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник такой, что $AB = AE = CD = 1$, $\angle ABC = \angle DEA = 90^\circ$ и $BC + DE = 1$. Вычислите площадь пятиугольника $ABCDE$.

4. Положительные x и y таковы, что

$$x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy = 2000.$$

Найдите $x + y$.

10–11 класс

1. В ряд выписываются все натуральные числа, начиная с единицы, в записи которых участвуют лишь цифры 0, 1, 2 и 7. На каком месте в этом ряду появится число 2017?

2. Решите систему уравнений в действительных числах

$$\begin{cases} \{a\} + [b] + \{c\} = 2{,}0 \\ \{b\} + [c] + \{a\} = 0{,}1 \\ \{c\} + [a] + \{b\} = 1{,}7 \end{cases},$$

где $[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть числа x.

3. На ста карточках написаны числа от 1 до 200. На каждой карточке по два числа: одно четное и одно нечетное, отличающиеся на 1. Вася выбрал 21 карточку. Могла ли сумма 42-х чисел на них оказаться равна 2017?

4. В тетраэдре $ABCD$ $\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle ABD = \angle BDC$. Докажите, что $AB = CD$.

Условия задач с решениями и критериями

Интернет-тур

6–7 класс

1. Найдите самое маленькое восьмизначное число, в записи которого используются только четные цифры, причем каждая четная цифра используется хотя бы один раз.

Ответ: 20000468.

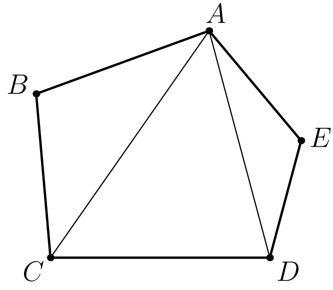
Любое число, которое не начинается на 20000, будет больше указанного в ответе. Пусть число начинается на 20000. Тогда последние три цифры должны быть 4, 6, 8 в некотором порядке. Ясно, что 468 соответствует наименьшему числу. □

2. В многоквартирном доме Статграда несколько подъездов с одинаковым количеством квартир. Известно, что квартиры 337 и 364 находятся в одном подъезде, а квартиры 504 и 533 — в разных подъездах, причем не в соседних. Сколько квартир в каждом подъезде?

Ответ: 28.

Обозначим число квартир в подъезде за n. Из условия следует, что квартиры с номерами 337, 338, 339, …, 363, 364 находятся в одном подъезде. Следовательно, n не меньше числа квартир в этом списке, т. е. $n \geqslant 364-337+1 = 28$. Рассмотрим теперь какой-нибудь подъезд, лежащий между содержащими квартиры 504 и 533 подъездами (они по условию не соседние). В рассматриваемом подъезде номера всех квартир не меньше 505 и не больше 532, а значит $n \geqslant 532-505+1 = 28$. Таким образом, $n = 28$ — единственный возможный ответ, и он (как нетрудно убедиться) действительно подходит. □

3. Пятиугольник $ABCDE$ с периметром 30 см разрезан двумя диагоналями AC и AD на три треугольника с периметрами 20 см каждый. Найдите длину стороны CD. Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: 5.

Сложим периметры пятиугольника $ABCDE$ и треугольника ACD, а затем вычтем периметры треугольников ACB и ADE. Получим:

$$\begin{aligned} 10 = 30 + 20 - 20 - 20 = \\ = (AB + BC + CD + DE + EA) + (AC + CD + DA) - \\ - (AC + CB + BA) - (AD + DE + EA) = 2CD. \end{aligned}$$

Значит, $CD = 5$. □

4. Трехзначное натуральное число N с тремя различными цифрами называется *удачным,* если оно равно среднему арифметическому всех чисел, полученных из него перестановкой цифр. Например, число $N = 481$ удачно, так как является средним арифметическим чисел 418, 481, 148, 184, 814 и 841. Найдите наибольшее удачное число. (Для того, чтобы посчитать среднее арифметическое нескольких чисел, надо сумму этих чисел поделить на их количество.)

Ответ: 629.

Пусть $N = 100a+10b+c$, где a, b, c — цифры числа N; среднее арифметическое шести чисел, полученных из N перестановками цифр, вычисляется по следующей формуле:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6} \cdot \Big((100a + 10b + c) + (100a + 10c + b) + (100b + 10a + c) + \\ &\qquad + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) + (100c + 10b + a)\Big) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot 222 \cdot (a + b + c) = 37 \cdot (a + b + c). \end{aligned}$$

Таким образом, удачность числа N равносильна равенству $100a+10b+c = 37 \cdot (a + b + c)$, которое упрощается до $7a = 3b + 4c$. Дальнейшее решение можно оформить в виде небольшого перебора, но мы сделаем немного хитрее: перепишем это равенство в виде

$$c = \frac{7a - 3b}{4} = a + 3 \cdot \frac{a - b}{4}\,.$$

Из этого равенства следует, в частности, что $a - b$ должно быть кратно четырем, иначе c получится не целым. Значит, числа a и b различаются хотя бы на 4, и если $a \geqslant 6$, то $a-b \geqslant 4$. Подставим эту оценку в выражение для c, получим

$$c = a + 3 \cdot \frac{a - b}{4} \geqslant a + 3.$$

Если $a \geqslant 7$, то $c \geqslant 10$, противоречие (все цифры меньше 10). Если $a = 6$, то $b = 2$ (так как $a - b$ кратно 4) и $c = 9$. Получилось 629. □

5. Некто взял 2017 листов бумаги, на каждом из которых написал $+1$ или -1, и разложил их по 2017 конвертам. Вы можете указать на произвольные три конверта и узнать произведение чисел, находящихся внутри этих конвертов. За какое наименьшее число вопросов можно гарантированно узнать произведение всех чисел?

Ответ: 673.

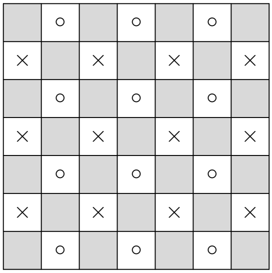
Ясно, что не более чем за 672 вопроса узнать произведение не получится, так как иначе количество конвертов, участвовавших в вопросах, будет не больше $672 \cdot 3 = 2016$, и тогда найдется конверт, на который ни разу не указывали, число на котором может быть как $+1$, так и -1. При замене этого числа на противоположное всё произведение поменяет знак, а значит выяснить значение этого произведения не удастся.

Покажем теперь, как можно узнать произведение за 673 вопроса. Пронумеруем конверты и в первые три хода поинтересуемся произведением чисел в тройках конвертов $(1,2,3), (1,4,5), (1,6,7)$. Оставшиеся 2010 конвертов разобьем на 670 троек и спросим про них. Теперь перемножим все 673 числа, полученных в ответ на заданные вопросы. В это произведение все числа, кроме лежащего в первом конверте (назовем его x), будут входить ровно по одному разу, а число x — три раза. Если поделить рассматриваемое произведение на x^2, то, с одной стороны, получится искомое произведение всех чисел в конвертах; с другой стороны, деление на x^2 не изменит значения выражения, так как $x^2 = 1$ для $x = \pm 1$. $\square$

6. Вася принял решение в течение семи недель заниматься математикой. Первая неделя начинается в понедельник первого сентября. Вася не готов заниматься более одного раза в неделю или более одного раза в один и тот же день недели (т. е., например, два занятия не могут приходится на два вторника); занятия должны проходить только по четным числам. Сколькими способами он может организовать себе серию из 6 занятий?

Ответ: 576.

Нарисуем календарь в виде таблицы 7×7. Клетки таблицы покрасим в шахматном порядке (1 сентября будет черным). Тогда задача может быть переформулирована следующим образом: сколькими способами можно выбрать 6 белых клеток в таблице 7×7 так, чтобы все выбранные клетки лежали в разных столбцах и в разных строках. В такой формулировке и будем ее решать.



Разобьем белые клетки на два типа (на рисунке помечены знаками $\times$ и $\circ$). Клетки разных типов всегда лежат в разных строках и в разных столбцах, а значит, выбирать клетки разных типов можно независимо. Клетки одного типа формируют таблицу 4×3, в которой легко посчитать число способов отметить клетки: клетка в первом ряде 1×4 может лежат в любой из четырех строк; клетка во втором ряде — в любой из трех оставшихся; клетка в третьем — в любой из двух свободных строк. Итак, число способов поставить три клетки одного типа равно $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Аналогично, есть 24 способа поставить клетки второго типа. В итоге число способов составить расписание занятий равно $24^2 = 576$. $\square$

8–9 класс

1. Из числа $\underbrace{20172017\ldots2017}_{100 \text{ раз по «2017»}}$ вычеркнули 100 цифр так, чтобы оставшееся число было максимальным. Какая цифра стоит на сотом месте (если считать слева) у результата?

Ответ: 7.

Ясно, что после оптимального вычеркивания число выглядит так:

$$\underbrace{77\ldots7}_{33\times«7»}217\underbrace{2017\ldots2017}_{66\times«2017»}.$$

В нем на всех позициях, номера которых кратны четырем, стоят цифры 7. $\square$

2. Выражения

$$A = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \ldots + 99 \cdot 100 + 101$$

и

$$B = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + \ldots + 98 \cdot 99 + 100 \cdot 101$$

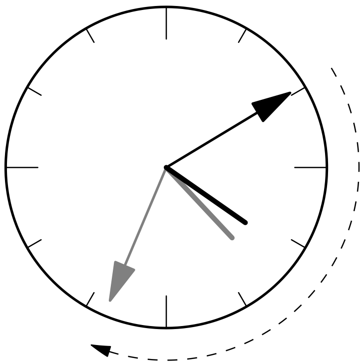
получены вписыванием чередующихся знаков сложения и умножения в последовательности натуральных чисел $1, 2, \ldots, 101$. Найдите $B - A$.

Ответ: 5000.

В разности $B - A$ сгруппируем слагаемые следующим образом: $1 + 2 \cdot (3 - 1) + 4 \cdot (5 - 3) + \ldots + 100 \cdot (101 - 99) - 101$. Выражение упроститься до суммы $1 + 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + 50) - 101 = -100 + 4 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} = 5000$. $\square$

3. Лёша внимательно наблюдает за часами и отслеживает *счастливые* моменты, когда минутная и часовая стрелка образуют угол в 66°. Каков минимальный по продолжительности промежуток времени между двумя счастливыми моментами? Ответ выразите в минутах.

Ответ: 24.

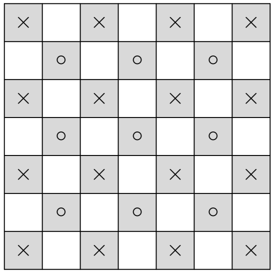


Минутная стрелка движется со скоростью 360° в час, часовая — со скоростью 30° в час, поэтому относительная скорость движения минутной стрелки относительно часовой составляет 330° в час. За минимальный промежуток между двумя счастливыми моментами минутная стрелка относительно часовой стрелки должна преодолеть $2 \cdot 66^\circ$, на что ей потребуется $2 \cdot 66/330$ часа, то есть 24 минуты. $\square$

4. Петя принял решение в течение семи недель заниматься физикой. Первая неделя начинается в понедельник первого сентября. Петя не готов заниматься более одного раза в неделю или более одного раза в один и тот же день недели (т. е., например, два занятия не могут приходится на два вторника); занятия должны проходить только по нечетным числам. Сколькими способами он может организовать себе серию из 6 занятий?

Ответ: 1008.

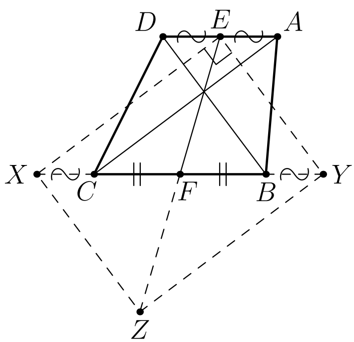
Нарисуем календарь в виде таблицы таблицу 7×7. Клетки таблицы покрасим в шахматном порядке (1 сентября будет черным). Тогда задача может быть переформулирована следующим образом: сколькими способами можно выбрать 6 черных клеток в таблице 7×7 так, чтобы все выбранные клетки лежали в разных столбцах и в разных строках. Далее работаем именно с этой формулировкой



Разобьем черные клетки на два типа (на рисунке помечены знаками $\times$ и $\circ$). Клетки разных типов всегда лежат в разных строках и в разных столбцах, а значит, выбирать клетки разных типов можно независимо. Клетки одного типа формируют таблицу 4×4, клетки другого — таблицу 3×3. Заметим, что если шесть клеток отмечены, то существует единственный способ поставить воображаемую седьмую клетку, не нарушая условия со строками таблиц 3×3 и 4×4 (потому что в одной из таблиц ровно одна строка и ровно один столбец свободны). Легко понять, что поставить семь клеток в разные столбцы и строки этих таблиц можно ровно $4! \cdot 3! = 24 \cdot 6 = 144$ способами. Осталось среди семи расставленных клеток назначить одну воображаемую; это можно сделать, очевидно, семью способами. Таким образом, окончательный ответ: $144 \cdot 7 = 1008$. $\square$

5. Точки E и F являются серединами оснований AD и BC трапеции $ABCD$. Оказалось, что $AC = 8$ см, $BD = 6$ см и $EF = 5$ см. Найдите площадь трапеции $ABCD$ в квадратных сантиметрах.

Ответ: 24.



(Все длины далее в сантиметрах.) Проведем отрезки EX и EY параллельно соответственно AC и BD так, что X и Y попадут на продолжения отрезка BC. Так как $EXCA$ и $EYBD$ — параллелограммы, то стороны EX и EY треугольника EXY равны соответственно 8 и 5, а EF — его медиана ($FX = FC + CX = FC + AE = FB + DE = FB + BY = FY$). Достроим EXY до параллелограмма $EXZY$. Диагональ EZ будет пересекать XY в середине, а потому продолжать EF и по длине равняться 10. Тогда треугольник EXZ — прямоугольный, ведь его стороны 10, 8 и 6. Значит, $EXZY$ — прямоугольник, и EXY — также прямоугольный треугольник. Площадь EXY равна $8 \cdot 6/2 = 24$. Осталось заметить, что эта площадь совпадает с площадью трапеции, так как высота трапеции равна высоте треугольника из вершины E, а сумма оснований трапеции равна соответствующей стороне треугольника ($XY = YB + BC + CX = CE + BC + AE = BC + AC$). □

6. В вершинах правильного n-угольника расставлены числа от 1 до n в некотором порядке. При этом расстояния между вершинами, в которых стоят последовательные числа, одинаковые. Такое же расстояние между вершинами, в которых стоят числа 1 и n. Оказалось, что вершина с числом 13 соседствует с вершинами, соответствующими числам 54 и 31. Найдите n.

Ответ: 59.

Впишем многоугольник в окружность. Вершины многоугольника разобьют эту окружность на n дуг. Посадим в вершину с числом 1 муравья и заставим его бегать по окружности по часовой стрелке с постоянной скоростью (скажем, одна дуга в минуту). Из условия расстановки чисел по вершинам следует, что последовательные числа муравью будут встречаться через равные промежутки времени (t минут), так как равенство расстояний между парами вершин многоугольника равносильно равенству дуг. В вершине с числом n муравей окажется через $(n-1)t$ минут. Если он потратит еще t минут на движение, он пройдет расстояние nt дуг, то есть совершит t полных оборотов и вернется в вершину с числом 1. Таким образом, путь из вершины n в вершину 1 также занимает t минут.

Заметим, что за время $(31-13)t = 18t$ муравей переползает из вершины с числом 13 в вершину с числом 31. Получается, что через $18t$ минут муравей оказывается в соседней вершине. В частности, за это время он переползет из вершины с числом 54 в вершину с числом 13. За эти $18t$ минут муравей 18 раз переползет в вершину с следующим числом, т. е. в последовательности $55, 56, \ldots, n-1, n, 1, 2, \ldots, 13$ должно быть ровно 18 элементов. Отсюда $n - 55 + 1 + 13 = n - 41 = 18$, $n = 59$. □

10–11 класс

1. Выражения

$$A = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \ldots + 2015 \cdot 2016 + 2017$$

и

$$B = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + \ldots + 2014 \cdot 2015 + 2016 \cdot 2017$$

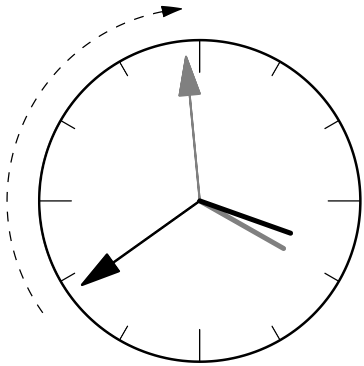
получены вписыванием чередующихся знаков сложения и умножения в последовательности натуральных чисел $1, 2, \ldots, 2017$. Найдите $B - A$.

Ответ: 2032128.

В разности $B - A$ сгруппируем слагаемые следующим образом: $1 + 2 \cdot (3 - 1) + 4 \cdot (5 - 3) + \ldots + 2016 \cdot (2017 - 2015) - 2017$. Выражение упростится до суммы $1 + 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + 1008) - 2017 = -2016 + 4 \cdot \frac{1008 \cdot 1009}{2} = 2032128$. $\square$

2. Леша внимательно наблюдает за часами и отслеживает *счастливые* моменты, когда минутная и часовая стрелка образуют угол в 125°. Каков минимальный по продолжительности промежуток времени между двумя счастливыми моментами? Ответ выразите в минутах.

Ответ: 20.

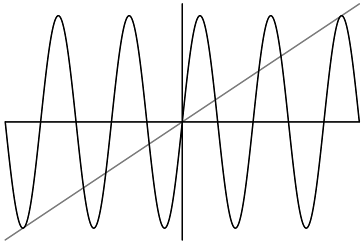


Минутная стрелка движется со скоростью 360° в час, часовая — со скоростью 30° в час, поэтому относительная скорость движения минутной стрелки относительно часовой составляет 330° в час. Если между двумя счастливыми моментами минутная стрелка обогнала часовую, то относительно часовой стрелки она должна преодолеть $2 \cdot 125^\circ = 250^\circ$. Если же она прошла позади часовой, то она должна преодолеть $2 \cdot (180^\circ - 125^\circ) = 110^\circ$. Рассмотрим второй случай, так как угол меньше. Затраченное время при этом составит $110^\circ / 330^\circ = 1/3$ часа, то есть 20 минут. $\square$

3. Сколько действительных решений имеет уравнение $2x = \sin(2017\pi x)$?

Ответ: 2019.

Замечание. Верный ответ легко угадывается, если аккуратно нарисовать графики правой и левой частей уравнения (заменив $n = 2017$ на меньшее нечетное число).



(график растянут по горизонтали)

Например, при $n = 9$ получается 11 решений (необходимо заметить, что рядом с крайними решениями $x = \pm 1/2$ есть еще по одному корню, так как прямая $y = 2x$ не может быть касательной в точках $x = \pm 1/2$ к графику правой части уравнения).

Заметим сразу, что обе части уравнения нечетны по x, и все решения симметричны относительно нуля. Отметим, что $x = 0$ является решением; далее достаточно убедится, что положительных решений ровно 1009.

Сначала заметим, что $x = 1/2$ является решением, так как $2017\pi/2 = 1008 \cdot 2\pi + \pi/2$. Легко видеть, что при $x > 1/2$ решений нет (левая часть больше 1).

На каждом из отрезков

$$\big[(k - 0{,}5)/2017; (k + 0{,}5)/2017\big], \quad k = 1, 2, \ldots, 1008,$$

функция $\sin(2017\pi x)$ меняется от -1 до 1 (или наоборот), а функция $2x$ не превосходит 1 по модулю. Из непрерывности обеих функций следует, что на каждом из указанных отрезков есть хотя бы одно решение уравнения. Более того, все эти решения различны: совпадение двух из них означало бы, что число $(k \pm 0{,}5)/2017$ является решением, но правая часть при этом равна ± 1, откуда следовало бы $x = \pm 1/2$. Кроме того, на «крайнем» отрезке $[1007{,}5/2017; 1/2]$ есть хотя бы два решения. Действительно, если бы там было лишь решение $x = 1/2$, то прямая $y = 2x$ была бы не ниже графика $y = \sin(2017\pi x)$ на этом отрезке; так как при $x > 1/2$ она также не ниже, то эта прямая была бы касательной к графику в точке $x = 1/2$. Но $x = 1/2$ является точкой максимума функции $\sin(2017\pi x)$, касательная к ее графику там должна быть горизонтальной — получаем противоречие. Значит, всего положительных решений хотя бы 1009.

С другой стороны, рассмотрим отрезки

$$\big[m/2017; (m + 1)/2017\big], \quad m = 0, 2, 4, \ldots, 1008.$$

На каждом из них функция $\sin(2017\pi x)$ строго выпукла вверх, и ее график больше двух пересечений с прямой $y = 2x$ иметь не может. На дополняющих отрезках ($m = 1, 3, \ldots$) наши функции и вовсе разных знаков; а при $m > 1008$ получаем, что левая часть больше 1. Получается, что больше 1010 решений на этих отрезках быть не может, причем в первом отрезке мы посчитали решение $x = 0$. Значит, всего положительных решений не более 1009. $\square$

4. В физико-математическом конкурсе предлагается 20 задач по математике и 17 по физике. Каждый из школьников, участвующих в конкурсе, выбрал пару задач: одну по математике и одну по физике. При этом для каждого школьника хотя бы одна из выбранных им задач выбрана не более чем одним другим школьником. Какое максимальное количество школьников могло участвовать в конкурсе?

Ответ: 70.

Назовем задачу *непопулярной,* если ее выбрали не более двух школьников.

Пример. Пусть была одна задача по математике была «простая», и одна по физике тоже «простая». Пусть среди школьников 38 выбрали «простую» задачу по физике и 19 задач по математике, кроме «простой» (по два школьника на задачу). Пусть другие 32 школьника, наоборот, выбрали «простую» задачу по математике и 16 задач по физике, кроме «простой». Тогда все задачи, кроме «простых», оказались непопулярными, и каждый из 70 школьников хотя бы одну непопулярную задачу выбрал.

Оценка. Сопоставим каждому школьнику одну из выбранных им непопулярных задач. Тогда каждой задаче сопоставлено не более двух школьников. Отсюда школьников не более чем $2n$, где n — количество непопулярных задач. Если непопулярных задач не более 35, то школьников не более 70. Пусть непопулярных задач больше, т. е. «популярная» задача не более чем одна. Тогда либо все задачи по математике непопулярные, либо все задачи по физике. В первом случае школьников не более чем удвоенное количество задач по математике, т. е. не более 40. Во втором случае, аналогично, не более 34. $\square$

5. В вершинах правильного n-угольника расставлены числа от 1 до n в некотором порядке. При этом расстояния между вершинами, в которых стоят последовательные числа, одинаковые. Такое же расстояние между вершинами, в которых стоят числа 1 и n. Оказалось, что вершина с числом 20 соседствует с вершинами, соответствующими числам 158 и 45. Найдите n.

Ответ: 163.

Впишем многоугольник в окружность. Вершины многоугольника разобьют эту окружность на n дуг. Посадим в вершину с числом 1 муравья и заставим его бегать по окружности по часовой стрелке с постоянной скоростью (скажем, одна дуга в минуту). Из условия расстановки чисел по вершинам следует, что последовательные числа муравью будут встречаться через равные промежутки времени (t минут), так как равенство расстояний между парами вершин многоугольника равносильно равенству дуг. В вершине с числом n муравей окажется через $(n-1)t$ минут. Если он потратит еще t минут на движение, он пройдет расстояние nt дуг, то есть совершит t полных оборотов и вернется в вершину с числом 1. Таким образом, путь из вершины n в вершину 1 также занимает t минут.

Заметим, что за время $(45-20)t = 25t$ муравей переползает из вершины с числом 20 в вершину с числом 45. Получается, что через $25t$ минут муравей оказывается в соседней вершине. В частности, за это время он переползет из вершины с числом 158 в вершину с числом 20. За эти $25t$ минут муравей 25 раз переползет в вершину с следующим числом, т. е. в последовательности $159, 160, \ldots, n-1, n, 1, 2, \ldots, 20$ должно быть ровно 25 элементов. Отсюда $n - 159 + 1 + 20 = n - 138 = 25$, $n = 163$. □

6. Тетраэдр $ABCD$ таков что $\angle BAD = 60°$, $\angle BAC = 40°$, $\angle ABD = 80°$, и угол между ребрами AB и CD равен $90°$. Найдите $\angle ABC$. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 70.

Проведем высоту DH в треугольнике ABD. Заметим, что плоскость CDH содержит две прямые, перпендикулярные AB (CD и DH), а потому сама перпендикулярна AB. Тогда CH тоже является высотой в треугольнике ABC. Получаем

$$\frac{\operatorname{tg}(\angle DBA)}{\operatorname{tg}(\angle DAB)} = \frac{DH \operatorname{ctg}(\angle DAB)}{DH \operatorname{ctg}(\angle DBA)} = \frac{AH}{HB} = \frac{CH \operatorname{ctg}(\angle CAB)}{CH \operatorname{ctg}(\angle CBA)} = \frac{\operatorname{tg}(\angle CBA)}{\operatorname{tg}(\angle CAB)},$$

откуда $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(80°) \cdot \operatorname{tg}(40°) / \operatorname{tg}(60°)$, где x — искомый угол. Произведение в числителе запишем следующим образом $\operatorname{tg}(60° + 20°) \cdot \operatorname{tg}(60° - 20°)$ и преобразуем по формуле тангенса суммы и тангенса разности. В результате получаем выражение

$$\frac{3 - \operatorname{tg}^2(20°)}{1 - 3\operatorname{tg}^2(20°)}.$$

С другой стороны, воспользуемся формулой тангенса тройного угла (которую легко вывести из формул синуса и косинуса тройного угла)

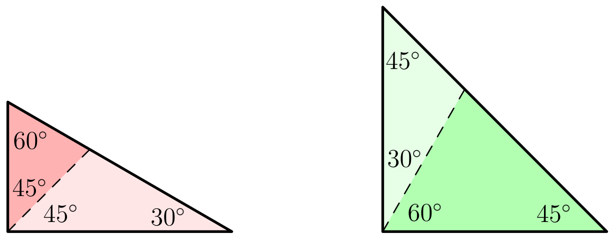
$$\operatorname{tg}(3\alpha) = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{3 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

для выражения $\operatorname{tg} 60°$ через $\operatorname{tg} 20°$. В результате получим, что $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} 20°$. Поскольку угол x, очевидно, острый, $x = 70°$. □

Статград

6–7 класс

1. Есть два бумажных прямоугольных треугольника, красный и зеленый. У красного углы равны 30°, 60° и 90°, а у зеленого — 45°, 45° и 90°. Требуется разрезать каждый треугольник на два треугольника меньшего размера и образовать две пары разноцветных треугольников так, чтобы в каждой паре треугольники имели одинаковые наборы углов. Как это сделать?



Существуют и другие верные примеры. □

+ Правильный пример. 7 баллов

− Неправильный пример. 0 баллов

2. За большим круглым столом расселись 16 человек: рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый заявил, что оба его соседа — лжецы. Какое наименьшее количество рыцарей за столом могло быть?

Ответ: 6.

Оценка. Каждому лжецу сопоставим одного из рядом сидящих рыцарей (два лжеца рядом с лжецом по условию сидеть не могут). Тогда каждому рыцарю сопоставлены не более двух лжецов. Это означает, что лжецов не более чем в два раза больше, чем рыцарей. Следовательно, рыцарей не менее трети от общего числа, то есть хотя бы 6.

Пример: Достаточно предъявить циклическую последовательность лжецов рыцарей такую, что у каждого лжеца есть хотя бы один сосед-рыцарь, и никакие два рыцаря не сидят рядом:

Л Р Л Л Р Л Л Р Л Л Р Л Л Р Л Р

□

± Доказано, что рыцарей не может быть меньше шести. 4 балла

∓ Приведен пример для шести рыцарей. 2 балла

$\bar{\cdot}$ Указано, что лжец не может сидеть между двух лжецов (или, равносильно, три лжеца не могут сидеть подряд). 1 балл

3. Сколько раз встречается цифра 1 в десятичной записи числа

$$9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots99}_{2017 \text{ раз «9»}}\ ?$$

Ответ: 2013.

Заметим, что $\underbrace{99\ldots99}_{t} = 1\underbrace{00\ldots00}_{t} - 1$. Тогда наше выражение равно

$$10 + 100 + \ldots + 1\underbrace{00\ldots00}_{2017} - 2017 = \underbrace{11\ldots1111}_{2017}0 - 2017$$

Вычитая столбиком, легко видеть, что это число $11\ldots109093$, в котором 2018 цифр, из них только 5 не единицы. □

$\pm$ Правильный ход и идея решения, но неправильный ответ (в силу арифметической ошибки). 4 балла

$\bar{\cdot}$ Правильный ответ без обоснования. 1 балл

4. На ста карточках написаны числа от 1 до 200. На каждой карточке по два числа: одно четное и одно нечетное, отличающиеся на 1. Вася выбрал 21 карточку. Могла ли сумма 42-х чисел на них оказаться равна 2017?

Ответ: нет.

Заметим, что если на карточке написано 1, то должно быть и 2; далее, если написано 3, то должно быть и 4 (так как 2 уже занято); и т. д. Следовательно, все пары чисел имеют вид $2k - 1$ и $2k$, то есть сумма чисел на каждой карточке имеет вид $4k - 1$. Тогда сумма на 21 карточке должна иметь вид $4m - 21$. Осталось заметить, что $2017 + 21$ не делится на 4, то есть 2017 в таком виде не представляется. □

$\mp$ Есть явное наблюдение того, что остаток при делении на 4 у суммы чисел на карточках равен трем, но из этого не делается выводов, решающих задачу. 3 балла

$\mp$ Есть явное наблюдение того, что сумма чисел на карточках нечетна. Оценивается как продвижение. 2 балла

$\bar{\cdot}$ Указано, что все пары чисел имеют вид $2k - 1$ и $2k$. 1 балл

8–9 класс

1. Карина и Петя вместе шли на олимпиаду по ОБЖ со скоростью 6 км/ч. В 9:30 Петя вспомнил, что он оставил дома включенный утюг, и побежал назад со скоростью 10 км/ч; добравшись до дома, он немедленно выключил утюг и побежал с той же скоростью догонять Карину (которая продолжала всё это время идти с неизменной скоростью). В 10:00 они встретились снова. В какой момент времени Петя выключил утюг?

Ответ: 9:36.

Когда Петя удаляется от Карины, расстояние между ними растет со скоростью 16 км/ч, а когда он ее догоняет, расстояние уменьшается со скоростью 4 км/ч. Значит, на отдаление будет потрачено в четыре раза меньше времени, чем на сближение. Так как весь процесс занял 30 минут, то удаление заняло $30/5 = 6$ минут. □

± Ход решения правильный, но есть арифметическая ошибка, приводящая к неправильному ответу. 4 балла

∓ Правильный ответ без обоснования. 1 балл

2. Сколько раз встречается цифра 1 в десятичной записи числа

$$9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots99}_{2017\text{ раз «9»}} \ ?$$

Ответ: 2013.

Заметим, что $\underbrace{99\ldots99}_{t} = 1\underbrace{00\ldots00}_{t} - 1$. Тогда наше выражение равно

$$10 + 100 + \ldots + 1\underbrace{00\ldots00}_{2017} - 2017 = \underbrace{11\ldots1111}_{2017}0 - 2017$$

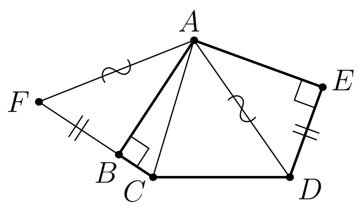
Вычитая столбиком, легко видеть, что это число $11\ldots109093$, в котором 2018 цифр, из них только 5 не единицы. □

± Правильный ход и идея решения, но неправильный ответ (в силу арифметической ошибки). 4 балла

∓ Правильный ответ без обоснования. 1 балл

3. Пусть $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник такой, что $AB = AE = CD = 1$, $\angle ABC = \angle DEA = 90°$ и $BC + DE = 1$. Вычислите площадь пятиугольника $ABCDE$.

Ответ: 1.



Продлим отрезок CB за точку B на длину DE и отметим точку F. Треугольник ABF равен треугольнику AED по двум катетам. Это означает, что площадь $ABCDE$ равна площади $AFCD$. Кроме того, отсюда следует, что $AF = AD$, и треугольник ACF равен треугольнику ACD. Значит, искомая площадь равна удвоенной площади треугольника ACF, которая, в свою очередь, равна $1/2$, так как основание CF и высота AB равны 1. $\square$

$\underset{\bullet}{-}$ Правильный ответ без обоснования. 1 балл

4. Положительные x и y таковы, что

$$x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy = 2000.$$

Найдите $x + y$.

Ответ: 10.

Добавим и вычтем $3x^2y + 3xy^2 = 3xy(x+y)$ к уравнению. Получим:

$$(x+y)^3 + (x+y)^3 - 3xy(x+y-10) = 2000\,.$$

Разложим $2(x+y)^3 - 2 \cdot 10^3$ как разность кубов:

$$2(x+y-10)\big((x+y)^2 + 10(x+y) + 100\big) - 3xy(x+y-10) = 0\,.$$

Осталось вынести общий множитель

$$(x+y-10)\big(2(x+y)^2 + 20(x+y) + 200 - 3xy\big) = 0$$

и показать, что вторая скобка не равна нулю. Это следует из того, что $2(x+y)^2 - 3xy = 2x^2 + xy + 2y^2 > 0$; остальные слагаемые во второй скобке, очевидно, положительны. Получаем, что $x + y - 10 = 0$. $\square$

$\mp$ Приведено правильное разложение на сомножители, но не обосновано, что второй сомножитель отличен от нуля. Или второй сомножитель вычислен неправильно из-за арифметической ошибки. 3 балла

$\underset{\bullet}{-}$ В исходном равенстве сделана замена $x + y = a$, $xy = b$, но разложение на множители получить не удалось. 1 балл

$\underset{\bullet}{-}$ Правильный ответ без обоснования. 1 балл

10–11 класс

1. В ряд выписываются все натуральные числа, начиная с единицы, в записи которых участвуют лишь цифры 0, 1, 2 и 7. На каком месте в этом ряду появится число 2017?

Ответ: 135.

Заметим, что однозначных чисел указанного вида всего 3, двузначных — $3 \cdot 4$ (первая цифра одна из трех ненулевых, вторая — любая из четырех), а трехзначных — $3 \cdot 4 \cdot 4$. Далее, четырехзначных чисел, начинающихся на 1, всего $4 \cdot 4 \cdot 4$. Осталось посчитать четырехзначные числа, начинающиеся на 2. Это 2000, 2001, 2002, 2007, 2010, 2011, 2012 — всего семь чисел до 2017. Суммируя, получаем, что до 2017 написано 134 числа. □

± В целом правильное решение из-за арифметической ошибки приводит к неправильному ответу. 5 баллов

∓ Правильный ответ без обоснования. 1 балл

2. Решите систему уравнений в действительных числах

$$\begin{cases} \{a\} + [b] + \{c\} = 2{,}0 \\ \{b\} + [c] + \{a\} = 0{,}1 \\ \{c\} + [a] + \{b\} = 1{,}7 \end{cases},$$

где $[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть числа x.

Ответ: $a = 0{,}2$, $b = 1{,}9$, $c = -0{,}2$ либо $a = 1{,}7$, $b = 1{,}4$, $c = -0{,}7$.

Применим дробную часть к обеим частям каждого уравнения, используя тождество $\{\{x\}\pm\{y\}\} = \{x\pm y\}$. Получаем, что $\{a+c\} = 0{,}0$, $\{b+a\} = 0{,}1$ и $\{c+b\} = 0{,}7$. Сложим первое со вторым и вычтем третье, получим, что $\{2a\} = \{0{,}1 - 0{,}7\} = 0.4$. Отсюда либо $\{a\} = 0{,}2$, либо $\{a\} = 0{,}7$. В первом случае получаем, что $\{b\} = 0{,}9$ и $\{c\} = 0{,}8$; когда дробные части чисел известны, целые части однозначно извлекаются из уравнений: получаем $a = 0{,}2$, $b = 1{,}9$, $c = -0{,}2$. Во втором случае получаем $\{b\} = 0{,}4$ и $\{c\} = 0{,}3$; тогда $a = 1{,}7$, $b = 1{,}4$, $c = -0{,}7$. Осталось заметить, что обе полученные тройки подходят в исходную систему. □

± Найдены оба решения (в решении есть понимание того, что случаев два), но в результате арифметической ошибки одно из них неправильное. 6 баллов

± Найдены оба решения (в решении есть понимание того, что случаев два), но арифметические ошибки не позволили найти ни один правильный ответ. 4 балла

∓ Получено только одно решение. 3 балла

∓ Установлено, что сумма дробных частей a и c равна 1, но к решению это не приводит. 2 балла

3. На ста карточках написаны числа от 1 до 200. На каждой карточке по два числа: одно четное и одно нечетное, отличающиеся на 1. Вася выбрал 21 карточку. Могла ли сумма 42-х чисел на них оказаться равна 2017?

Ответ: нет.

Заметим, что если на карточке написано 1, то должно быть и 2; далее, если написано 3, то должно быть и 4 (так как 2 уже занято); и т. д. Следовательно, все пары чисел имеют вид $2k-1$ и $2k$, то есть сумма чисел на каждой карточке имеет вид $4k-1$. Тогда сумма на 21 карточке должна иметь вид $4m-21$. Осталось заметить, что $2017+21$ не делится на 4, то есть 2017 в таком виде не представляется. □

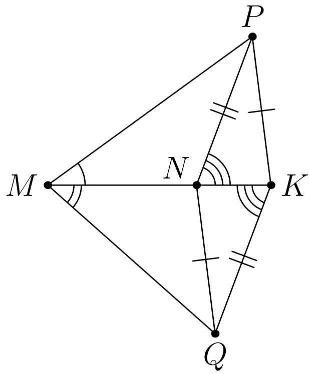
∓ Есть явное наблюдение того, что остаток при делении на 4 у суммы чисел на карточках равен трем, но из этого не делается выводов, решающих задачу. 3 балла

∓ Есть явное наблюдение того, что сумма чисел на карточках нечетна. Оценивается как продвижение. 2 балла

-. Указано, что все пары чисел имеют вид $2k-1$ и $2k$. 1 балл

4. В тетраэдре $ABCD$ $\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle ABD = \angle BDC$. Докажите, что $AB = CD$.

Предположим, что $AB > CD$. Построим на некоторой плоскости отрезок MK равный AB, и на нем отметим N так, что $MN = CD$. По одну сторону от отрезка достроим треугольник MPN, равный DBC, а по другую построим MQN, равный CAD (всё в той же плоскости). Тогда треугольник MPK равен BDA по двум сторонам ($MK = AB$ и $MP = BD$) и углу между ними; аналогично, треугольник MQK равен ACB. Так как $PN = BC = QK$ и $PK = AD = QN$, то $PKQN$ — параллелограмм.



Тогда $\angle MKQ = \angle KNP = \angle KMP + \angle MPN$. Но $\angle ABC = \angle MKQ$, $\angle ABD = \angle KMP$ и $\angle DBC = \angle MPN$. Это означает, что в вершине тетраэдра B сходятся три плоских угла, один из которых равен сумме двух других. Это невозможно. Противоречие. □

Другое решение. Обозначим $k = AB/CD$. Тогда из равенств углов в условии следуют соотношения $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CA}$. Складывая их получаем

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}) = k\overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}).$$

Очевидное наблюдение $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ после преобразований приводит к следующему выводу:

$$(\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) = 0\,.$$

Обозначим $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ и $k\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{v}$. По определению коэффициента k векторы $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ имеют одинаковую длину. Не умаляя общности $|\overrightarrow{u}| = |\overrightarrow{v}| = 1$, тогда имеем

$$0 = \left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right) \cdot \left(\overrightarrow{u} + \frac{1}{k}\overrightarrow{v}\right) = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right)\,.$$

Поскольку векторы u и v неколлинеарны, это возможно лишь при $k = 1$. □

— Промежуточные продвижения не оцениваются, как и разбор частных случаев: правильный тетраэдр, равногранный тетраэдр, плоский случай. 0 баллов.