Олимпиада «Курчатов» — 2017 по математике

6 класс, 19 марта 2017 г.

\+ Полное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.

6 класс

1. Замените звездочки цифрами так, чтобы пример на умножение в столбик стал верным. (Достаточно указать один способ это сделать.)

$$\begin{array}{r} 2**\\ \times\quad **\\ \hline *61\\ ***\\ \hline **01 \end{array}$$

Пример:

$$\begin{array}{r} 287\\ \times\quad 23\\ \hline 861\\ 574\\ \hline 6601 \end{array}$$

Замечание. Других решений не существует. □

\+ Правильный пример. 7 баллов

− Отсутствие правильного примера. 0 баллов

2. Зайчик, ежик и белочка дарят друг другу орехи. Сначала ежик и белочка подарили ровно половину своих орехов зайчику. Затем белочка и зайчик отдали ровно половину того, что имеют, ежику. Наконец, зайчик и ежик отдали ровно половину имеющихся у них орехов белочке. Известно, что у белочки и в начале, и в конце было 44 ореха. Сколько всего орехов у зверят? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

Ответ: 77. Белочка подарила в первый раз 22 ореха, а во второй раз 11 орехов. Значит в третий раз она получила 33 ореха, и это составило половину орехов зайчика и ежика. Следовательно, в конце у зайчика и ежика осталось 33 ореха. □

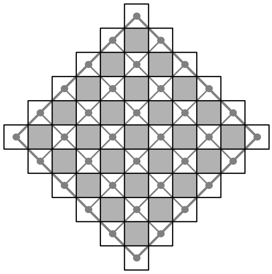
± Правильное рассуждение с арифметической ошибкой, приводящее к неправильному ответу. 5 баллов

−. Правильный ответ без обоснования (пример обоснованием не считается). 1 балл

3. В одной из клеток бесконечного клетчатого листа бумаги сидит лягушонок. За один прыжок он смещается в соседнюю по стороне клетку. Назовем клетку *прекрасной,* если лягушонок может в ней оказаться ровно через 2017 прыжков. Сколько всего прекрасных клеток?

Ответ: $4\,072\,324 = 2018^2$.

Покрасим клетки листа в шахматном порядке. Предположим, что изначально лягушонок сидит на черной клетке. Тогда, поскольку каждым прыжком лягушонок меняет цвет клетки, на которой он расположен, после 2017 прыжков он окажется на белой клетке. Далее, заметим, что если он припрыгал в какую-то белую клетку менее чем за 2017 прыжков, то эта клетка всё равно прекрасная: оставшиеся прыжки он может разбить на пары, прыгая в соседнюю клетку и обратно. Белые клетки, до которых лягушонок может допрыгать за 2017 прыжков, выстраиваются в квадрат со стороной 2018, если смотреть по диагонали (рис. для 5 прыжков).



Следовательно, искомых клеток всего $2018 \cdot 2018$. □

+ Правильное решение с ответом, записанным в виде 2018^2. 7 баллов

+. Правильное решение с правильным ответом, записанным в виде суммы с многоточием. 5 баллов

± В правильном решении замечено, что клетки выстраиваются в квадрат, но неправильно посчитана сторона квадрата. В результате ответ выражен в виде квадрата с основанием, отличным от 2018. 5 баллов

∓ Присутствует идея шахматной раскраски. 3 балла

-. Правильный ответ без обоснования. 1 балл

4. Алексей написал на доске несколько последовательных натуральных чисел. Оказалось, что лишь у двух из написанных чисел сумма цифр делится на 8: у наименьшего и у наибольшего. Какое максимальное количество чисел могло быть написано на доске?

Ответ: 16.

Пример: числа от $9\,999\,991$ до $10\,000\,007$.

Оценка. Докажем, что более 16 чисел быть не может. Назовем число *хорошим,* если его сумма цифр делится на 8. Среди выписанных чисел обязательно есть число x, заканчивающееся на 0, иначе чисел слишком мало. Число x не первое, поскольку тогда оно и $x+8$ хорошие, и чисел не более 9. Среди чисел x, $x+1$, $\ldots$, $x+7$ обязательно есть хорошее — наибольшее с указанным свойством. Число $x-1$ заканчивается на 9, поэтому среди чисел $x-1$, $x-2$, $\ldots$, $x-8$ обязательно есть хорошее — наименьшее с указанным свойством. Таким образом, все выбранные числа укладываются в промежуток от $x-8$ до $x+7$ включительно. Следовательно, количество выписанных на доску чисел не превосходит 16. $\square$

$\pm$ Оценка правильная, пример с незначительной ошибкой. 5–6 баллов

$\mp$ Оценка без примера. 3 балла

$\mp$ Пример без оценки. 3 балла

5. В клубе любителей чая состоят 20 джентльменов. У каждого джентльмена ровно 13 друзей среди остальных членов клуба. Совет клуба состоит из 10 наиболее выдающихся любителей чая, которые дружат каждый с каждым. Докажите, что весь клуб можно разделить на две группы так, чтобы в каждой из групп любые двое были друзьями.

Достаточно доказать, что 10 «невыдающихся» членов клуба также дружат каждый с каждым.

Посчитаем количество пар джентльменов, которые не дружат. С одной стороны, их ровно $20 \cdot 6/2 = 60$, так как каждый не дружит с 6 другими, и каждую такую пару недрузей мы считаем по два раза.

С другой стороны, каждый выдающийся любитель чая дружит с 4 и не дружит с 6 невыдающимися джентльменами. Значит, пар недрузей выдающийся–невыдающийся ровно $10 \cdot 6 = 60$.

Следовательно, никаких других пар джентльменов, не дружащих между собой, быть не может, то есть среди невыдающихся членов клуба все дружат со всеми. $\square$

$+\!\!\!\!\cdot$ Правильное рассуждение с арифметической ошибкой, не повлиявшей на ход решения. 6 баллов

$-\!\!\!\!\cdot$ В решении присутствует утверждение о том, что невыдающиеся любители чая дружат каждый с каждым, но это не обосновано формально, либо приведен пример, когда это так. 2 балла