1. Натуральное число называется *палиндромом*, если оно не изменяется при выписывании его цифр в обратном порядке (например, числа 4, 55, 626 — палиндромы, а 20, 201, 2015 — нет). Представьте число 2000 двумя способами в виде суммы двух палиндромов.

2. Пятерых детей выстроили в шеренгу и раздали им 40 конфет. У детей, стоящих слева от Данила — 35 конфет, справа от Люды — 23, слева от Максима — 30, справа от Саши — 32 конфеты. Пятого ребенка зовут Валя. Сколько конфет может быть у неё? (Ответ объясните.)

3. В шестизначном числе первую и последнюю цифру заменили звёздочками *2015*. Известно, что число делится на 72. Восстановите число.

4. Склеенный из двух единичных кубиков прямоугольный брусок $1 \times 1 \times 2$ перекатывают (через ребра) по клетчатой доске 20×15. Можно ли прокатить его так, чтобы каждую клетку брусок покрыл ровно один раз? (Нельзя выходить за границы доски.)

5. Два мальчика живут в селах, между которыми по прямой трассе 90 км, а их тётя — ровно посередине между ними. Тётя пригласил мальчиков в гости. У неё есть мопед, скорость которого 40 км/ч, а с пассажиром — всего 30 км/ч. Все стартуют одновременно: ребята выходят пешком со скоростью 5 км/ч, а тётя выезжает на мопеде, по очереди подбирает мальчиков на трассе и подвозит их. Как им всем собраться у тёти не позднее, чем через 4 часа после старта?

1. Пятерых детей выстроили в шеренгу и раздали им 111 конфет. У детей, стоящих слева от Данила — 96 конфет, справа от Люды — 57, слева от Максима — 69, справа от Саши — 75 конфет. Пятого ребенка зовут Валя. Как зовут того, кому досталось больше всего конфет, и сколько у него конфет?

2. Можно ли какой-нибудь клетчатый квадрат разрезать по границам клеток на две фигуры одинакового периметра так, чтобы в одной фигуре клеток было ровно в 4 раза больше, чем в другой?

3. Ученику дано число x, записанное как обыкновенная дробь со знаменателем 7. Он вычислил три новых числа $2x$, $3x$ и $4x$. Каждое из трех новых чисел ученик округлил до ближайшего целого и результаты сложил. Получилось 100. Найдите x. (Число округляется в меньшую сторону, если его дробная часть меньше $1/2$, и в большую, если дробная часть больше либо равна $1/2$.)

4. В прямоугольном треугольнике ABC провели биссектрису AL и отметили на гипотенузе AB такую точку K, что $AB = 3BK$. Оказалось, что угол ALK — прямой. Докажите, что $AL = BL$.

5. Вначале на каждой клетке шахматной доски 8×8 стоит по одной шашке — они считаются столбиками из одной шашки (а в процессе игры будут образовываться столбики и из нескольких шашек). За один ход разрешается переставить любой столбик ходом ферзя: по вертикали, горизонтали или диагонали *на столько клеток сколько в нем шашек* (то есть, столбик из одной шашки ходит на соседнюю клетку, из двух шашек — прыгает через клетку и т.п.). Если столбик попал на непустую клетку, он ставится на верх стоящего там столбика и объединяется с ним. Можно ли за 63 хода собрать все шашки на одной клетке?

1. Можно ли какой-нибудь клетчатый квадрат разрезать по границам клеток на две фигуры одинакового периметра так, чтобы в одной фигуре клеток было ровно в 8 раз больше, чем в другой?

2. Делитель натурального числа называется *собственным*, если он не равен самому числу и 1. Найдите все такие натуральные числа, у которых самый большой собственный делитель на 5 больше куба самого маленького собственного натуральный делителя.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ провели серединные перпендикуляры к сторонам AB, BC и CD. Внутри четырехугольника эти перпендикуляры не пересеклись. Точки пересечения этих перпендикуляров разбили сторону AD на 4 равные части. Докажите, что $AD \parallel BC$.

4. Ученику дано число x, записанное как обыкновенная дробь с однозначным знаменателем. Он вычислил три новых числа $2x$, $4x$ и $5x$ (все они оказались не целыми и не полуцелыми). Каждое из трех новых чисел ученик округлил до ближайшего целого и результаты сложил. Получилось 120. Найдите x. (Число округляется в меньшую сторону, если его дробная часть меньше $1/2$, и в большую, если дробная часть больше либо равна $1/2$.)

5. Вначале на каждой клетке шахматной доски 8×8 стоит по одной шашке — они считаются столбиками из одной шашки (а в процессе игры будут образовываться столбики и из нескольких шашек). За один ход разрешается переставить любой столбик ходом ладьи: по вертикали или горизонтали *на столько клеток сколько в нем шашек* (то есть, столбик из одной шашки ходит на соседнюю клетку, из двух шашек — прыгает через клетку и т.п.). Если столбик попал на непустую клетку, он ставится на верх стоящего там столбика и объединяется с ним. Можно ли за 63 хода собрать все шашки на одной клетке?

1. Делитель натурального числа называется *собственным*, если он не равен самому числу и 1. Найдите все такие натуральные числа, у которых самый большой собственный делитель отличается на 3 (в ту или другую сторону) от куба самого маленького собственного делителя.

2. Можно ли какой-нибудь клетчатый квадрат разрезать по границам клеток на две фигуры одинакового периметра так, чтобы в одной фигуре клеток было ровно в 8,5 раз больше, чем в другой?

3. Ученику дано число x, записанное как обыкновенная дробь с однозначным знаменателем. Он вычислил три новых числа $5x$, $7x$ и $9x$ (все они оказались не целыми). Каждое из трех новых чисел ученик округлил до ближайшего целого и результаты сложил. Получилось 50. Найдите x. (Число округляется в меньшую сторону, если его дробная часть меньше $1/2$, и в большую, если дробная часть больше либо равна $1/2$.)

4. На медиане CM треугольника ABC выбрана такая точка D, что $2CD = \frac{1}{2}AB$. Прямая BD пересекает сторону AC в точке E. Докажите, что если $DE = CE$, то угол $BMC = 120°$.

5. Вначале на каждой клетке шахматной доски 8×8 стоит по одной шашке — они считаются столбиками из одной шашки (а в процессе игры будут образовываться столбики и из нескольких шашек). За один ход разрешается переставить любой столбик ходом ладьи: по вертикали или горизонтали *на столько клеток сколько в нем шашек* (то есть, столбик из одной шашки ходит на соседнюю клетку, из двух шашек — прыгает через клетку и т.п.). Если столбик попал на непустую клетку, он ставится на верх стоящего там столбика и объединяется с ним. Можно ли за 63 хода собрать все шашки на одной клетке?

1. Ученику дано число x: это обыкновенная дробь со знаменателем 9. Ученик вычислил три новых числа $2x$, $4x$ и $5x$, каждое из этих трёх чисел округлил до ближайшего целого и результаты округлений сложил. Получилось 111. Найдите x. (Число округляется в меньшую сторону, если его дробная часть меньше $1/2$, и в большую, если дробная часть больше либо равна $1/2$.)

2. $f(x)=x^3-4x$, $g(x)=x^3-4x^2+1$. Докажите, что при любом $a>0$ многочлен $af+g$ имеет не менее трёх различных корней.

3. Митя сложил все нечётные натуральные делители некоторого чётного числа N (включая единицу), а Ваня сложил все чётные натуральные делители числа N (включая само число). Затем Ванину сумму умножили на Митину. Может ли произведение быть квадратом натурального числа?

4. На медиане CM треугольника ABC выбрана такая точка D, что $2CD=\frac{1}{2}AB$. Прямая BD пересекает сторону AC в точке E. Докажите, что если $DE=CE$, то угол $BMC=120^\circ$.

5. Вначале на каждой клетке доски 100×100 стоит по одной шашке — они считаются столбиками из одной шашки (а в процессе игры будут образовываться столбики и из нескольких шашек). За один ход разрешается переставить любой столбик ходом ладьи: по вертикали или горизонтали *на столько клеток, сколько в нем шашек* (то есть, столбик из одной шашки ходит на соседнюю клетку, из двух шашек — прыгает через клетку и т.п.). Если столбик попал на непустую клетку, он ставится на верх стоящего там столбика и объединяется с ним. Можно ли за 9999 ходов собрать все шашки на одной клетке?

1. Ученику дано число x: это обыкновенная дробь со знаменателем 9. Ученик вычислил три новых числа $2x$, $4x$ и $5x$, каждое из этих трёх чисел округлил до ближайшего целого и результаты округлений сложил. Получилось 120. Найдите x. (Число округляется в меньшую сторону, если его дробная часть меньше $1/2$, и в большую, если дробная часть больше либо равна $1/2$.)

2. $f(x) = x^3 - 9x$, $g(x) = x^3 - 5x^2 + 1$. Докажите, что если $b > 0$, то у многочлена $f + bg$ есть не менее 3 различных действительных корней.

3. Митя сложил все нечётные натуральные делители некоторого чётного числа N (включая единицу), а Ваня сложил все чётные натуральные делители числа N (включая само число). Затем Ванину сумму умножили на Митину. Может ли произведение быть квадратом натурального числа?

4. $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, $AB > CD$, $BC > AD$. На сторонах AB и BC отмечены точки X и Y так, что $AX = CD$ и $AD = CY$. M — середина XY. Докажите, что угол AMC — прямой.

5. Вначале на каждой клетке доски 100×100 стоит по одной шашке — они считаются столбиками из одной шашки (а в процессе игры будут образовываться столбики и из нескольких шашек). За один ход разрешается переставить любой столбик ходом ладьи: по вертикали или горизонтали *на столько клеток, сколько в нем шашек* (то есть, столбик из одной шашки ходит на соседнюю клетку, из двух шашек — прыгает через клетку и т.п.). Если столбик попал на непустую клетку, он ставится на верх стоящего там столбика и объединяется с ним. Можно ли за 9999 ходов собрать все шашки на одной клетке?

6. Для приготовления картофельного пюре повару Коле надо как можно быстрее получить заданный объём очищенной картошки. Не заботясь об экономии очисток, он из шарообразных картофелин вырезает кубики, каждым взмахом ножа очищая по одной грани. Может ли он справиться с заданием быстрее при той же частоте взмахов ножа, если будет вырезать какие-нибудь другие многогранники? (Формально: верно ли, что из всех многогранников, вырезаемых из данного шара, наибольшее отношение объема к числу граней — у вписанного куба?)