6 класс

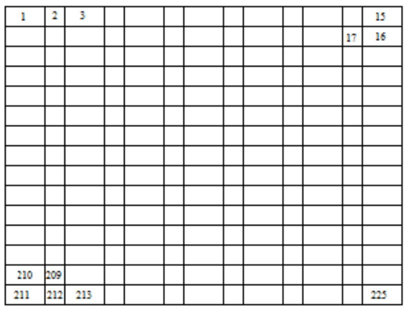
1. Ответ. 1001+999, 1991+9.
Критерий. Оценивается только ответ. Только один способ – 3 балла, оба способа – 7 баллов.

2. Ответ. 13.

Решение. Поскольку справа от Саши конфет больше, чем справа от Люды, то Люда стоит правее Саши. Аналогично, Максим – левее Данила. Поскольку конфет слева от Максима и справа от Люды в сумме больше, чем всего конфет (30+23>40), то чьи-то конфеты сосчитаны более одного раза. Значит, между Людой и Максимом кто-то стоит, и это может быть только Валя. Именно за счет неё насчитано 30+23–40=13 лишних конфет. Значит, у Вали как раз 13 конфет.
Замечание. Поскольку в условии явно сказано, что такое расположение было, восстанавливать полное распределение детей и конфет не обязательно. Можно доказать, что оно такое (дети перечислены слева направо, в скобках – число конфет): Саша (8), Люда (9), Валя (13), Максим (5), Данил(5).
Критерий. Верный ответ – не менее 2 баллов. Верный пример для всех (он включает и верный ответ для Вали) – не менее 3 баллов.

3. Ответ. 820152.
Решение. Если число делится на 72, то оно делится также на 8 и на 9. Значит, оно делится и на 4. Число делится на 4, если число из трёх последних цифр делится на 4. Из чисел вида 5* на 4 делятся 52 и 56, поэтому последняя цифра – 2 или 6. Число делится на 8, если число из трёх последних цифр делится на 8. Из чисел 152 и 156 на 8 делится 152, значит, последняя цифра равна 2. Число делится на 9, если его сумма цифр делится на 9. Сумма цифр числа X20152 равна X+10. Она делится на 9 только если цифра X=8. То, что 820152 делится на 72, можно проверить непосредственно.
Для знатоков. Делимость на 72 можно и не проверять: поскольку числа 8 и 9 не имеют общих делителей больше 1, число 820152 обязано делиться на произведение $8 \cdot 9=72$.
Критерий. Верный ответ – не менее 2 баллов. Верный ответ с проверкой, что он подходит, но без доказательства единственности – 3 балла.

4. Ответ. Можно.
Решение. Положим брусок на две клетки доски: одна угловая, вторая – соседняя с угловой, примыкает к краю длиной 20. Прокатим его вдоль этого края. Брусок по очереди закрывает то две, то одну клетку на краю. На полоске 1×20 поместятся семь «двоек» и шесть «единиц», то есть в конце снова будут закрыты две клетки, одна из них угловая. Теперь перекатим брусок на соседнюю полоску 1×20, и прокатим по ней, снова чередуя «двойки» и «единицы». Так, зигзагом, последовательно прокатим брусок по всем полоскам 1×20. На рисунке отмечены «двойки» и «единицы», пронумерованные в порядке прохождения.



Критерий. Верный алгоритм без обоснования, что он работает всегда (скажем, без обоснования, что брусок не выйдет за границы доски) – не менее 3 баллов. Неверный алгоритм – 0 баллов.

5. Решение. Пусть мальчиков зовут Петя и Вася. Тётя едет за Петей и встретится с ним через час, когда Петя пройдёт 5 км, а тётя проедет 40 км. Тётя подвозит Петю на 30 км за

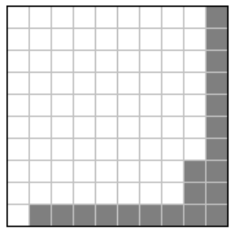
1 час и высаживает его, не доезжая 10 км до своего дома. Далее Петя идет пешком, а тётя едет налегке навстречу Васе, до которого в этот момент 45 км. За час тётя проедет 40 км, Вася пройдет 5 км и встретится с тётей в 30 км от её дома. Еще через час тётя с Васей доедут до дома, а Петя за это время (час плюс час) пройдет оставшиеся 10 км.
Критерий. Верный алгоритм без обоснования, что он работает (то есть, что времена и расстояния сходятся) – не менее 3 баллов. Неверный алгоритм – 0 баллов.

7 класс

1. Ответ. Саша, 36 конфет.

Решение. Поскольку справа от Саши конфет больше, чем справа от Люды, то Люда стоит правее Саши. Аналогично, Максим – левее Данила. Поскольку конфет слева от Максима и справа от Люды в сумме больше, чем всего конфет (69+57>111), то чьи-то конфеты сосчитаны более одного раза. Значит, между Людой и Максимом кто-то стоит, и это может быть только Валя. Именно за счет неё насчитано 69+57–111=15 лишних конфет. Значит, у Вали как раз 15 конфет. А вообще, справа налево дети стоят в таком порядке: Саша, Люда, Валя, Максим, Данил. Справа от Саши на 75–57=18 конфет больше, чем справа от Люды – за счет Люды. Слева от Данила на 96–69=27 конфет больше, чем слева от Максима – за счет Максима. Сашины конфеты дополняют до 111 конфеты справа от него, то есть, у него 111–75=36 конфет. Аналогично, у Данила 111–96=15 конфет. Итак, больше всех конфет досталось Саше.
Критерий. Верный ответ – не менее 2 баллов. Верный пример для всех – не менее 3 баллов.

2. Ответ. Можно, см. рис. Доска 10×10, в темной части 20 клеток, в светлой – 80. Периметры фигур можно не подсчитывать, достаточно проверить, что периметр доски разделился пополам (а линия внутри доски добавляет к периметрам частей поровну).



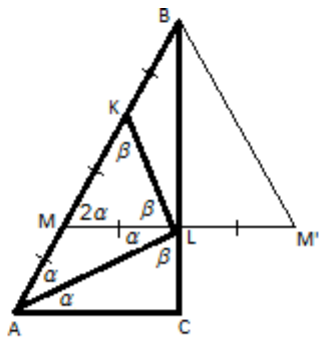
Замечание для проверяющих. Примеров много. Но во всех них сторона квадрата кратна 5, а внешний периметр делится строго пополам.

Критерий. Верный пример – не менее 4 баллов. Остальные баллы получают за обоснование правильности примера.

3. Ответ. $11^1/_7$.
Решение. Давайте число a после округления обозначать $R(a)$. Проверим, что $x=11^1/_7$ – подходит. Действительно, $R(2x)+R(3x)+R(4x)=R(22^2/_7)+R(33^3/_7)+R(44^4/_7) = 22+33+45 = 100$. Проверим, что другие числа не подходят. Воспользуемся тем, что если $a\le b$, то и $R(a)\leqslant R(b)$. Если $x<11^1/_7$, то $x\leqslant 11$. Тогда $R(2x)+R(3x)+R(4x)\leqslant R(22)+R(33)+R(44) = 22+33+44 = 99$. А если $x>11^1/_7$, то $x\ge 11^2/_7$. Тогда $R(2x)+R(3x)+R(4x)\ge R(22^4/_7)+R(33^6/_7)+R(45^1/_7) = 23+34+45 = 102>100$.

Критерий. Верный ответ – не менее 2 баллов. Верный ответ с проверкой, что он подходит, но без доказательства единственности – 3 балла.

4. Решение. Пусть $BK=m$, $\angle BAL=\angle CAL=\alpha$, и пусть $90°-\alpha=\beta$. Так как сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90°, то, рассматривая треугольники ACL и AKL, найдем, что $\angle ALC=\angle AKL=\beta$. Поскольку $2\alpha<90°$, то и $\alpha<90°$. Поэтому внутри угла ALK можно провести луч под углом α к AL. Пусть этот луч пересечет AK в точке M. Ввиду равенства $\angle MLA=\angle MAL$ получим равнобедренный треугольник AML, где $AM=LM$. Но тогда $\angle MLK=90°-\alpha=\beta=\angle MKL$. Значит, треугольник MKL – тоже равнобедренный, $MK=ML$. Но тогда $MA=ML=MK$.

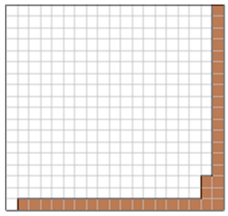


Поскольку $AB=3BK=3m$, то $AK=AB–BK=2m$, $MA=ML=MK=AK/2=m$. $\angle MLC=\alpha+\beta=90°$, поэтому и $\angle MLB=90°$. Продолжим отрезок ML на такое же расстояние за точку L, получим точку M'. Прямоугольные треугольники BLM и BLM' равны по двум катетам. Поэтому $BM'=BM=2m$. Но и $MM'=2ML=2m$. Значит, треугольник MBM' – равносторонний, его углы по 60°. $\angle BMM'=2\alpha$ – как внешний угол треугольника AML. Отсюда $\alpha=30°$, $\beta=60°$. В прямоугольном треугольнике ABC угол $ABC=90°–\angle A=90°–2\alpha=30°$. Значит, в треугольнике ABL углы при стороне AB равны, и он – равнобедренный: $AL=BL$.
Критерий. Можно без доказательства использовать, что в прямоугольном треугольнике медиана равна половине гипотенузы, и что катет равен половине гипотенузы только если он лежит против угла в 30°.

5. Ответ. Можно.

Решение. Заметим, что шашки любой полоски 1×k можно собрать на крайней клетке полоски. Для этого надо центральной шашкой прыгать туда сюда через середину полоски. Например, шашки 1, 2, 3, 4, 5 собираются на клетке 1 ходами: 3-4-2-5-1, а 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 – ходами 5-4-6-3-7-2-8-1.
Покажем, как собрать все шашки на левой нижней клетке K. Разобьем доску на диагональ из 8 клеток, проходящую через K, вертикальные полоски ниже этой диагонали и горизонтальные полоски левее диагонали. Действуя вышеуказанным способом, соберем все шашки диагонали на клетке K, шашки каждой вертикальной полоски – на её нижнем конце. Легко видеть, что на левом и нижнем краях в клетке, отстоящей от K на расстояние m собралось как раз m шашек. Значит, из каждой клетки краёв столбик может пойти на K. Поскольку каждым ходом мы освобождали по 1-й клетке и больше свободных клеток не занимали, мы освободим все клетки кроме K за 63 хода.
Критерий. За соображение собирать все клетки полоски длины k на её краю за k–1 ход – не менее 2 балов.

8 класс



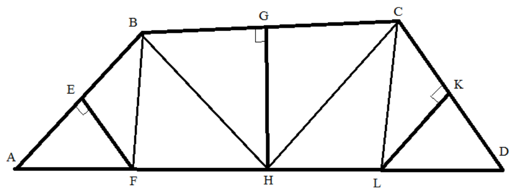
1. Ответ. Можно, см. рис. Квадрат 18×18, в темной части 36 клеток, в светлой – 288. Периметры фигур можно не подсчитывать, достаточно проверить, что периметр доски разделился пополам (а линия внутри доски добавляет к периметрам частей поровну).

Критерий. Верный пример – не менее 4 баллов. Остальные баллы получают за обоснование правильности примера.

2. Ответ: 26.

Решение. Пусть x – наименьший собственный делитель числа N. Числа x и x^3+5 – разной чётности, поэтому одно из них чётно. Оба числа – делители N, значит, N – чётно. Поэтому наименьший собственный делитель N равен 2. Так как $x=2$, то наибольший собственный делитель равен $2^3+5=13$. Ясно, что наибольший собственный делитель равен N/x. Поэтому $N=2\cdot 13=26$.

Критерий. Верный ответ с проверкой, что он подходит – не менее 2 баллов. Соображение, что наибольший и наименьший делитель разной четности – не менее 1 балла.



3. Решение. Пусть EF, GH и KL – указанные серединные перпендикуляры, $AF=FH=HL=LD=m$. По свойствам серединных перпендикуляров $HB=HC$, $FB=FA=m$ и $LC=LD=m$. Тогда треугольники FBH и LCH равны по трём сторонам. Значит, равны и высоты BB' и CC' этих треугольников. Но тогда $BB'C'C$ – прямоугольник, и $BC\|B'C'$. Но $B'C'$ лежит на прямой AD, поэтому $BC\|AD$.

Критерий. Доказано, что треугольники FBH и LCH равны – не менее 3 баллов.

4. Ответ. $10^8/_9$.

Решение. Давайте число a после округления обозначать $R(a)$, а сумму $R(2x)+R(4x)+R(5x)$ обозначим S. Докажем, что $10^6/_7<x<11$. Воспользуемся тем, что если $a\le b$, то и $R(a)\leqslant R(b)$. Если $x\leqslant 10^6/_7$, то $S\leqslant R(21^5/_7)+R(43^3/_7)+R(54^2/_7) = 22+43+54 = 119<120$, а при $x\geqslant 11$ $S\ge R(22)+R(44)+R(55) = 22+44+55 = 121>120$. Значит, $x=11-y$, где $0<y<^1/_7$ и записывается как правильная дробь с однозначным знаменателем. Значит, $y=^1/_8$ или $y=^1/_9$. Первое невозможно, так как тогда $4x=43{,}5$ – полуцелое число. Значит, $y=^1/_9$. Отсюда ответ $x=10^8/_9$, который, как легко проверить, подходит.

Критерий. Верный ответ – не менее 1 балла. Верный ответ с проверкой, что он подходит, но без доказательства единственности – 2 балла. Не отсеян ответ $x=10^7/_8$ – минус 2 балла.

5. Ответ. Нельзя.

Решение. Допустим, можно. Каждым ходом освобождается от шашек не более одной клетки. Так как вначале все клетки заняты, а в конце ровно 63 клетки должны быть свободны, то никакая свободная клетка не должна быть повторно занята.
На клетке Ф, где собраны все шашки, пересекаются вертикаль и горизонталь. Ходы на Ф делались только с этой вертикали и этой горизонтали, причем из каждой клетки не более одного раза. Число шашек, пришедших из клетки Х в Ф, равно расстоянию между Х и Ф.

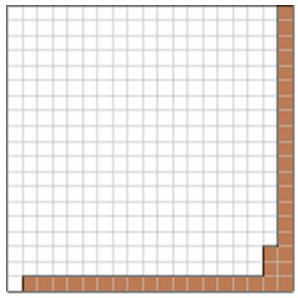
Сумма расстояний от всех клеток вертикали и горизонтали максимальна для угловой клетки Ф, она равна 2(1+2+3+4+5+6+7)=56. Значит, включая шашку, стоявшую изначально на Ф, на этой клетке могло собраться не более 57 шашек. Противоречие.
Критерий. За соображение, что никакая свободная клетка не должна быть повторно занята – не менее 1 балла.

9 класс

1. Ответ. 10 и 22.

Решение. Пусть x – наименьший собственный делитель числа N. Тогда его наибольший собственный делитель равен x^3+3 или x^3-3. Как числа x и x^3+5, так и числа x и x^3-5 – разной чётности, поэтому одно из них чётно. Оба числа – делители N, значит, N – чётно. Поэтому наименьший собственный делитель N равен 2. Так как $x=2$, то наибольший собственный делитель равен $2^3-3=5$ или $2^3+3=11$. Ясно, что наибольший собственный делитель равен N/x. Поэтому $N=2\cdot5=10$ или $2\cdot11=22$.

Критерий. За каждый из двух верных ответ с проверкой, что он подходит – по баллу. Соображение, что наибольший и наименьший делитель разной четности – не менее 1 балла. Всё верно, но пропущен один из ответов – минус 3 балла.



2. Ответ. Можно, см. рис. Квадрат 19×19, в темной части 38 клеток, в светлой – 323. Периметры фигур можно не подсчитывать, достаточно проверить, что периметр доски разделился пополам (а линия внутри доски добавляет к периметрам частей поровну).

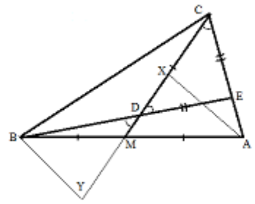
Критерий. Верный пример – не менее 4 баллов. Остальные баллы получают за обоснование правильности примера.

3. Ответ. $2^3/_8$.

Решение. Давайте число a после округления обозначать $R(a)$, а сумму $R(5x)+R(7x)+R(9x)$ обозначим S. Докажем, что $2{,}35\leqslant x\leqslant 2{,}4$. Воспользуемся тем, что если $a\leq b$, то и $R(a)\leqslant R(b)$. Действительно, если $x<2{,}35$, то $S\leqslant R(11{,}75)+R(16{,}45)+R(21{,}15) = 12+16+21 = 49<50$, а при $x\geqslant 2{,}4$ $S\geq R(12)+ R(16{,}8)+R(21{,}6) = 12+17+22 = 51>50$. Заметим ещё, что равенство $x=2{,}4$ невозможно, так как тогда $5x=12$ – целое число. Запишем $x=2+{}^m/_n$, где дробь ${}^m/_n$ несократима. Ясно, что $n\neq3$, 5, 7, 9, иначе одно из чисел $5x$, $7x$, $9x$ – целое. Ближайшие к интервалу [2,35; 2,4] числа со знаменателями 2 и 4 – это 2, 25 и 2,5, а со знаменателем 6 – это $2^1/_6<2{,}35$ и $2^5/_6>2{,}4$. Остается только случай $n=8$. Число $2^1/_8<2{,}35$, $2^5/_8>2{,}4$, а вот $2^3/_8=2{,}375$ подходит: $S= R(11^7/_8)+R(16^5/_8)+R(21^3/_8)=12+17+21=50$.

Критерий. Верный ответ – не менее 1 балла. Верный ответ с проверкой, что он подходит, но без доказательства единственности – 2 балла.

4. На медиане CM треугольника ABC выбрана такая точка D, что $2CD = {}^1/_2AB$. Прямая BD пересекает сторону AC в точке E. Докажите, что если $DE=CE$, то угол $BMC = 120°$.



Решение. В равнобедренном треугольнике CDE равны углы при основании CD, и они равны углу BDY. Опустим перпендикуляры AX и BY на прямую CM. Прямоугольные треугольники AMX и BMY равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $XM=MY={}^1/_2XY$ и $AX = BY$. Прямоугольные треугольники CAX и DBY равны по катету и острому углу, поэтому $DY = CX$, откуда $XY = CD = BM = MA$. В прямоугольном треугольнике AMX катет MX равен половине гипотенузы AM, поэтому $\angle XAM = 30°$, $\angle XMA = 60°$ и смежный ему $\angle BMC = 120°$.

Критерия нет, так как у задачи возможны разные, непохожие решения.

5. Ответ. Нельзя.

Решение. Допустим, можно. Каждым ходом освобождается от шашек не более одной клетки. Так как вначале все клетки заняты, а в конце ровно 63 клетки должны быть свободны, то никакая свободная клетка не должна быть повторно занята.
На клетке Ф, где собраны все шашки, пересекаются вертикаль и горизонталь. Ходы на Ф делались только с этой вертикали и этой горизонтали, причем из каждой клетки не более одного раза. Число шашек, пришедших из клетки Х в Ф, равно расстоянию между Х и Ф. Сумма расстояний от всех клеток вертикали и горизонтали максимальна для угловой клетки Ф, она равна $2(1+2+3+4+5+6+7)=56$. Значит, к шашке, стоявшей вначале на Ф, могло добавиться не более 56 других, то есть 64 шашки собраться не могли.

Критерий. За соображение, что никакая свободная клетка не должна быть повторно занята – не менее 1 балла.

10 класс

1. Ответ. $10^{1}/_{9}$.

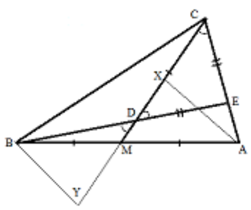
Решение. Давайте число a после округления обозначать $R(a)$, а сумму $R(2x)+R(4x)+R(5x)$ обозначим S. Докажем, что $10<x<10^{2}/_{9}$. Воспользуемся тем, что если $a\le b$, то и $R(a)\leqslant R(b)$. Если $x\leqslant 10$, то $S\leqslant R(20)+R(40)+R(50) = 110<111$. А если $x\geqslant 10^{2}/_{9}$, то $S\ge R(20^{2}/_{9})+R(40^{8}/_{9})+R(51^{1}/_{9}) = 20+41+51 = 112>111$. В указанном интервале есть только одно число со знаменателем 9 – это $10^{1}/_{9}$. Оно подходит: $S=R(20^{2}/_{9})+R(40^{4}/_{9})+R(50^{5}/_{9}) = 20+40+51 = 111$.

Критерий. Верный ответ – не менее 1 балла. Верный ответ с проверкой, что он подходит, но без доказательства единственности – 2 балла.

2. Решение. Обозначим $h=af + g$. Ясно, что функция $h(x)$ – непрерывна. $h(-2)=-23<0$, $h(0)=1>0$, $h(2)=-7<0$, $h(5)=105a+26>0$. Функция $h(x)$ принимает разные знаки на концах отрезков $[-2, 0]$, $[0, 2]$ и $[2, 5]$, поэтому на каждом из отрезков у неё есть корень. С другой стороны, при любом а коэффициент при x^3 положителен, поэтому $h(x)$ – многочлен 3-й степени. Значит, больше трёх корней у этого многочлена быть не может.
Критерий. Доказано, что корней не менее двух – не менее 2 баллов. За неупоминание непрерывности баллы не снимать.

3. Решение. Не может. Пусть 2 входит в k-й степени в разложение N на простые множители. Тогда для каждого нечетного делителя q у N есть ещё четные делители $2q$, $2^2q, \ldots, 2^kq$. Перебирая всевозможные нечетные делители N, мы так по разу выпишем и все четные делители. Соответственно вкладу q в сумму нечетных делителей соответствует вклад $q(2+2^2+\ldots+2^k)$ в сумму чётных делителей. Значит, если S – сумма нечётных, то $S(2+2^2+\ldots+2^k)$ – сумма чётных делителей, и произведение этих сумм равно $S^2(2+2^2+\ldots+2^k)$. Это число – не точный квадрат. Действительно, в разложение квадрата любое простое число должно входить в чётной степени. Однако 2 входит в разложение S^2 в чётной степени (возможно – в нулевой), а в разложение $(2+2^2+\ldots+2^k)$ – в степени 1, так как эта сумма на 2 делится, а на 4 – нет. Значит, 2 входит в разложение произведения в нечётной степени, и произведение квадратом не является.
Критерий. За выражение произведения в виде $S^2(2+2^2+\ldots+2^k)$– не менее 2 баллов.

4. Решение. В равнобедренном треугольнике CDE равны углы при основании CD, и они равны углу BDY. Опустим перпендикуляры AX и BY на прямую CM. Прямоугольные треугольники AMX и BMY равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $XM=MY={}^{1}/_{2}XY$ и $AX = BY$. Прямоугольные треугольники CAX и DBY равны по катету и острому углу, поэтому $DY = CX$, откуда $XY = CD = BM = MA$. В прямоугольном треугольнике AMX катет MX равен половине гипотенузы AM, поэтому $\angle XAM = 30°$, $\angle XMA = 60°$ и смежный ему $\angle BMC = 120°$.



Критерия нет, так как у задачи возможны разные, непохожие решения.

5. Ответ. Нельзя.
Решение. Допустим, можно. Каждым ходом освобождается от шашек не более одной клетки. Так как вначале все клетки заняты, а в конце ровно 9999 клеток должны быть свободны, то никакая свободная клетка не должна быть повторно занята.
На клетке Ф, где собраны все шашки, пересекаются вертикаль и горизонталь. Ходы на Ф делались только с этой вертикали и этой горизонтали, причем из каждой клетки не более одного раза. Число шашек, пришедших из клетки Х в Ф, равно расстоянию между Х и Ф.

Сумма расстояний от всех клеток вертикали и горизонтали максимальна для угловой клетки Ф, она равна 2(1+2+3+…+99)=9900. Значит, включая шашку, стоявшую изначально на Ф, на этой клетке могло собраться не более 9901 шашки. Противоречие.

Критерий. За соображение, что никакая свободная клетка не должна быть повторно занята – не менее 1 балла.

11 класс

1. Ответ. $10^8/_9$.

Решение. Давайте число a после округления обозначать $R(a)$, а сумму $R(2x)+R(4x)+R(5x)$ обозначим S. Докажем, что $10^7/_9<x<11$. Воспользуемся тем, что если $a\le b$, то и $R(a)\leqslant R(b)$. Если $x\leqslant 10^7/_9$, то $S\leqslant R(21^5/_9)+R(43^1/_9)+R(53^8/_9) = 22+43+54=119<120$. А если $x\geqslant 11$, то $S\ge R(22)+R(44)+R(55) = 121>120$. В указанном интервале есть только одно число со знаменателем 9 – это $10^8/_9$. Оно подходит: $S=R(21^7/_9)+R(43^5/_9)+R(54^4/_9) = 22+44+54 = 120$.

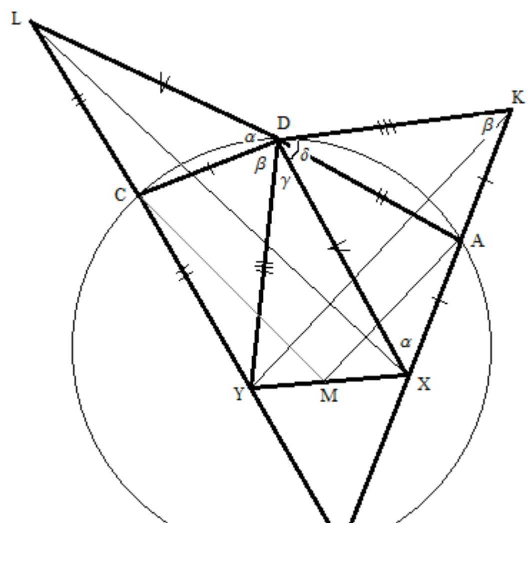
Замечание. Более вероятно другое решение: показать, что $10<x<11$, а дальше перебрать все числа со знаменателем 9 между ними. Если все верно, то это тоже полное решение.

Критерий. Верный ответ – не менее 1 балла. Верный ответ с проверкой, что он подходит, но без доказательства единственности – 2 балла. За верное решение с перебором не более 10 чисел оценку не снижать.

2. Решение. Обозначим $h=f+bg$. Ясно, что функция $h(x)$ – непрерывна.
$h(-3)=-71b<0$, $h(0)=b>0$, $h(3)=-17b<0$, $h(5)=80+b>0$. Функция $h(x)$ принимает разные знаки на концах отрезков [–3, 0], [0, 3] и [3, 5], поэтому на каждом из отрезков у неё есть корень.
Критерий. Доказано, что корней не менее двух – не менее 2 баллов. За неупоминание непрерывности баллы не снимать.

3. Решение. Не может. Пусть 2 входит в k-й степени в разложение N на простые множители. Тогда для каждого нечетного делителя q у N есть ещё четные делители $2q$, 2^2q, …, 2^kq. Перебирая всевозможные нечетные делители N, мы так по разу выпишем и все четные делители. Соответственно вкладу q в сумму нечетных делителей соответствует вклад $q(2+2^2+\ldots+2^k)$ в сумму чётных делителей. Значит, если S – сумма нечётных, то $S(2+2^2+\ldots+2^k)$ – сумма чётных делителей, и произведение этих сумм равно $S^2(2+2^2+\ldots+2^k)$. Это число – не точный квадрат. Действительно, в разложение квадрата любое простое число должно входить в чётной степени. Однако 2 входит в разложение S^2 в чётной степени (возможно – в нулевой), а в разложение $(2+2^2+\ldots+2^k)$ – в степени 1, так как эта сумма на 2 делится, а на 4 – нет. Значит, 2 входит в разложение произведения в нечётной степени, и произведение квадратом не является.
Критерий. За выражение произведения в виде $S^2(2+2^2+\ldots+2^k)$– не менее 2 баллов.

4. Решение. Отметим на лучах XA и YC точки K и L так, что $AK = AX = CD$ и $CL = CY = AD$ (см. рис.). Тогда AM и MC – средние линии в треугольниках KXY и LXY; поэтому нам достаточно доказать, что прямая KY перпендикулярна XL.



Поскольку $ABCD$ – вписанный четырёхугольник, то $\angle DAK = \angle YCD$. Треугольники DAK и CYD равны по двум сторонам и углу между ними; аналогично, равны треугольники CDL и AXD. Отсюда $DL = DX$, DK

$= DY$. Пусть $\angle LDC=\angle DXA=\alpha$, $\angle CDY=\angle DKA=\beta$, $\angle XDY=\gamma$, $\angle KDX=\delta$. Тогда $\alpha+\beta+\delta=\angle DXK+\angle DKA+\angle KDX=180°$ – как сумма углов треугольника KDX. В равнобедренных треугольниках LDX и KDY биссектрисы углов LDX и KDY перпендикулярны основаниям LX и KY соответственно, поэтому основания перпендикулярны если эти биссектрисы перпендикулярны. А угол между биссектрисами равен
$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)-\angle LDX/2-\angle KDY/2 = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)-(\alpha+\beta+\gamma)/2-(\gamma+\delta)/2 = (\alpha+\beta+\delta)/2 = 90°$. *ЧТД.*
Критерия нет, так как у задачи возможны разные, непохожие решения.

5. Ответ. Нельзя.
Решение. Допустим, можно. Каждым ходом освобождается от шашек не более одной клетки. Так как вначале все клетки заняты, а в конце ровно 9999 клеток должны быть свободны, то никакая свободная клетка не должна быть повторно занята.
На клетке Ф, где собраны все шашки, пересекаются вертикаль и горизонталь. Ходы на Ф делались только с этой вертикали и этой горизонтали, причем из каждой клетки не более одного раза. Число шашек, пришедших из клетки X в Ф, равно расстоянию между X и Ф. Сумма расстояний от всех клеток вертикали и горизонтали максимальна для угловой клетки Ф, она равна 2(1+2+3+…+99)=9900. Значит, включая шашку, стоявшую изначально на Ф, на этой клетке могло собраться не более 9901 шашки. Противоречие.
Комментарий для проверяющих. Если отказаться от ограничения количества ходов, то собрать все шашки на одной клетке можно.
Критерий. За соображение, что никакая свободная клетка не должна быть повторно занята – не менее 1 балла.

6. Решение. Может. Для этого ему достаточно вырезать вписанные в шар правильные пятиугольные призмы с такой же высотой, как у вписанного куба. Докажем это.
Пусть сторона куба равна a. Тогда вокруг грани куба описана окружность радиуса $R=a/\sqrt{2}$. Основание призмы вписано в ту же окружность, это правильный пятиугольник, его площадь $5\sin(2\pi/5)/2\cdot R^2$. Объем призмы $5\sin(2\pi/5)/2\cdot R^2a$, у неё 7 граней, поэтому искомое отношение равно $5\sin(2\pi/5)/2\cdot R^2\cdot a/7$. А для куба такое отношение равно $2R^2a/6$. Чтобы проверить, что призма лучше, достаточно проверить неравенство $5\sin(2\pi/5)/14>2/6$, или $\sin(2\pi/5)>14/15$. Но $\sin(2\pi/5)=\cos(\pi/10)$. Воспользуемся неравенством $\cos(x)>1-x^2/2$ (оно верно при $x>0$). $\cos(\pi/10)>1-\pi^2/200>1-3{,}15^2/200>1-10/200=19/20>14/15$.
Для тех, кто не знает неравенство $\cos(x)>1-x^2/2$, докажем его. Рассмотрим функцию $f(x)=\cos(x)-1+x^2/2$ при $x\geqslant 0$. Её производная равна $-\sin(x)+x$, что, ввиду известного неравенства $\sin(x)<x$, положительно при $x>0$. Значит, $f(x)$ строго возрастает. А так как $f(0)=0$, то $f(x)>0$ при $x>0$, что равносильно доказываемому неравенству.
Критерий. За указание многогранника с лучшим отношением без проверки – не менее 3 баллов. За доказательство неравенства $\sin(2\pi/5)> 14/15$ путем ссылки на приближенное табличное значение sin72° – штраф 2 балла (если, как надеюсь, использование калькулятора запрещено). За использование неравенств типа $\cos(x)>1-x^2/2$ или $\sin(x)>x-x^3/6$ *без доказательства* – баллы не снижать.