Задача 1. Пусть имеется пушка на поверхности земли, которая может выпускать снаряд со скоростью v_0 под любым углом к горизонту. Определите границу «простреливаемой» области: получите уравнение кривой, которая разделяет вертикальную плоскость на точки, достижимые для попадания снарядом, и на те, в которые снаряд не попадет ни в каком случае. Ускорение свободного падения равно g, сопротивлением воздуха пренебречь.

Возможное решение

Рассмотрим снаряд, выпущенный под произвольным углом α к горизонту.

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Его траектория будет описываться уравнением

$$y(x) = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)$$

Рассмотрим это уравнение относительно переменной $p = \operatorname{tg}\alpha$ и параметров (x, y).

$$p^2 \cdot \frac{gx^2}{2v_0^2} - p \cdot x + (y + \frac{gx^2}{2v_0^2}) = 0$$

Решением такого уравнения будет значение угла α, под которым надо выстрелить, чтобы попасть в точку с заданными координатами (x, y). Заметим, что данное уравнение является квадратным, соответственно имеются три случая:

1. уравнение имеет два корня, значит в точку можно попасть снарядом двумя способами;
2. уравнение имеет один корень, в точку можно попасть единственным способом;
3. уравнение не имеет корней, точка недостижима для попадания снарядом.

Можно заметить, эти три случая делят всю вертикальную плоскость на две искомые области. Второй случай соответствует границе «простреливаемой области». Для квадратного уравнения единственность решения равносильна равенству нулю его дискриминанта.

$$D(x, y) = x^2 + 4 \cdot \frac{gx^2}{2v_0^2}(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}) = 0$$

$$y(x) = \frac{v_0^2}{2g} - x^2 \cdot \frac{g}{2v_0^2} \text{ — искомое уравнение.}$$

Критерии

1. Найдена максимальная точка границы простреливаемой области по вертикали (+ 1 балл).
2. Найдена максимальная точка границы простреливаемой области по горизонтали (+ 1 балл).
3. Правильно записана система зависимостей координат от времени для траектории полета снаряда (+ 1 балл).
4. Получено уравнение траектории снаряда (+ 1 балл).
5. Правильно выполнен переход к квадратному уравнению относительно переменной p (+ 2 балла).
6. Правильно проведен анализ дискриминанта квадратного уравнения (+ 2 балла).
7. Получен правильный ответ (+ 2 балла).

Комментарий: если форма огибающей кривой подбирается в виде параболы без достаточного обоснования, то за в остальном верное решение — оценка 7 баллов.

Задача 2. Из тонкой проволоки согнут прямой угол, неподвижно закреплённый так, что одна из его сторон вертикальна. По сторонам угла могут скользить без трения маленькие бусинки 1 и 2 одинаковой массы. Бусинки соединены жёстким невесомым стержнем длины $L = 0{,}75$ м. При движении стержень может свободно поворачиваться вокруг точек крепления к бусинкам. В начальном положении бусинки неподвижны, стержень наклонён к горизонту под углом $\alpha = 30°$. Стержень с бусинками отпускают без толчка. Найдите максимальную скорость V, до которой разгонится бусинка 2 при движении бусинки 1 вниз. Бусинки считайте материальными точками. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразите в м/с и округлите до сотых.

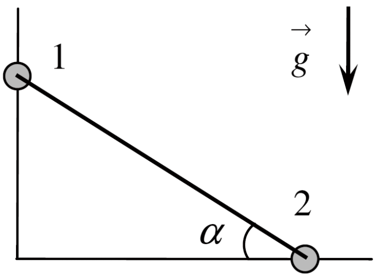


Рис. к задаче 2.

Возможное решение

Рассмотрим промежуточное положение системы, когда стержень наклонён к горизонту под углом φ. Скорости бусинок в этом положении обозначим через V_1 и V_2. Отсчитывая высоты от вершины угла, запишем закон сохранения энергии:

$$mgL\sin\alpha = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} + mgL\sin\varphi \quad\longrightarrow\quad V_1^2 + V_2^2 = 2gL\,(\sin\alpha - \sin\varphi)$$

Здесь m — масса бусинок. Так как длина стержня не меняется при движении, то проекции скоростей на направление стержня совпадают:

$$V_1\sin\varphi = V_2\cos\varphi$$

Исключая скорость V_1, находим V_2 как функцию угла φ:

$$V_1 = V_2\,\mathrm{ctg}\,\varphi \quad\longrightarrow\quad V_2^2\,(\mathrm{ctg}^2\varphi + 1) = 2gL\,(\sin\alpha - \sin\varphi) \quad\longrightarrow\quad V_2^2 = 2gL\sin^2\varphi\,(\sin\alpha - \sin\varphi)$$

Угол φ меняется на отрезке $[0, \alpha]$. На концах отрезка скорость V_2 обращается в нуль. Найдём экстремумы V_2. Приравнивая нулю первую производную по φ, получаем:

$$2\sin\varphi\,\cos\varphi\,\sin\alpha - 3\sin^2\varphi\,\cos\varphi = 0 \quad\longrightarrow\quad \sin\varphi\,\cos\varphi\,(2\sin\alpha - 3\sin\varphi) = 0$$

Максимуму соответствует корень

$$\sin\varphi = \frac{2\sin\alpha}{3}$$

Максимальная скорость второй бусинки равна:

$$V^2 = 2gL\left(\frac{2\sin\alpha}{3}\right)^2\left(\sin\alpha - \frac{2\sin\alpha}{3}\right) = gL\left(\frac{2\sin\alpha}{3}\right)^3$$

$$V = \sqrt{gL}\,\left(\frac{2\sin\alpha}{3}\right)^{3/2} = 0,53 \text{ м/с}$$

Ответ:

$$V = \sqrt{gL}\,\left(\frac{2\sin\alpha}{3}\right)^{3/2} = 0,53 \text{ м/с}$$

Критерии

1. Правильно записан закон сохранения энергии (+ 3 балла).
2. Записано условие нерастяжимости стержня (+ 2 балла).
3. Получена зависимость скорости от угла наклона (+ 2 балла).
4. Правильно найден угол наклона, при котором скорость максимальна (+ 2 балла).
5. Получен правильный численный ответ (+ 1 балл).

Задача 3. Одноатомный идеальный газ работает по циклу $1-2-3-1$, имеющему вид равнобедренного треугольника на диаграмме $P-V$. Известно, что процесс $1-2$ лежит на прямой, проходящей через начало координат. Отношение максимального давления в цикле к минимальному $P_2/P_1 = 2$. Найдите работу, совершаемую газом за один цикл, считая известными давление и объем в точке 1. Найдите КПД тепловой машины, работающей по указанному циклу.

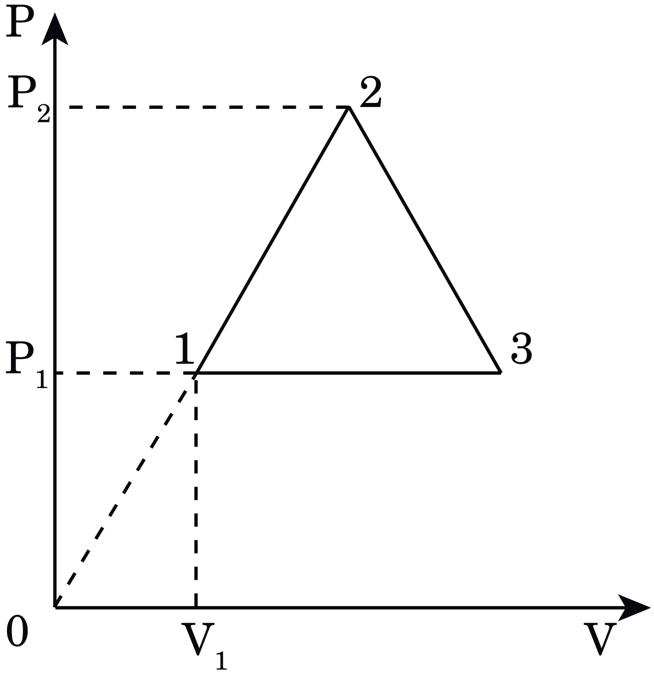
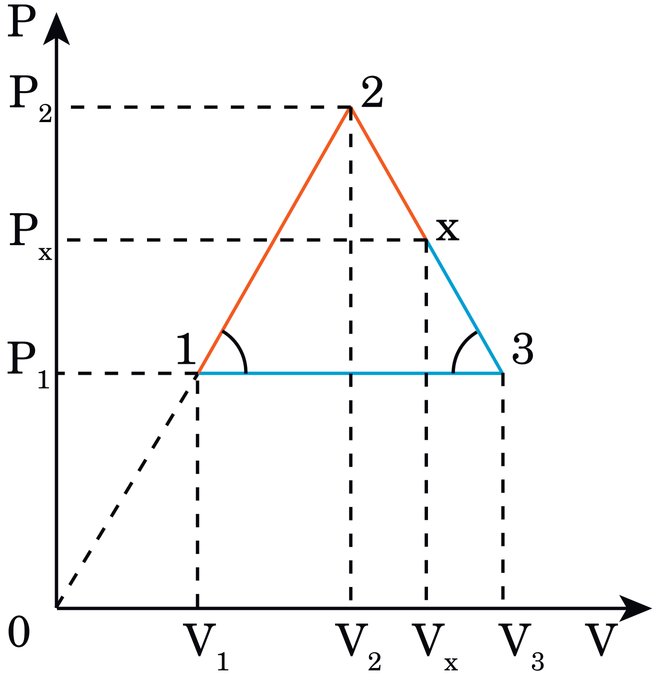


Рис. к задаче 3.



К решению задачи 3.

Возможное решение

Учитывая разную размерность осей на диаграмме $P-V$, у данного равнобедренного треугольника равными могут быть только боковые стороны. Т.к. процесс $1-2$ лежит на прямой, проходящей через начало координат, $V_2/V_1 = P_2/P_1 = 2$, откуда $V_2 = 2V_1$. Из симметрии треугольника относительно высоты, опущенной из точки 2, следует $V_3 - V_2 = V_2 - V_1 = V_1$, следовательно $V_3 = 3V_1$. Таким образом нам известны координаты всех вершин этого треугольника.

Работа вычисляется как площадь треугольника $1-2-3$:

$$A = \frac{(P_2 - P_1)(V_3 - V_1)}{2} = \frac{(2P_1 - P_1)(3V_1 - V_1)}{2} = P_1V_1$$

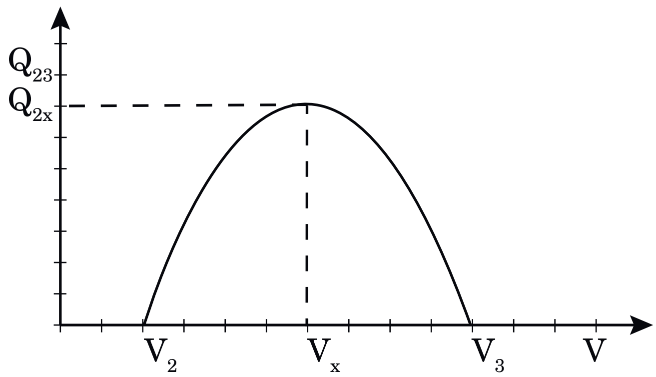
Для нахождения КПД тепловой машины, работающей по указанному циклу, необходимо найти количество подведенной теплоты. Теплота подводится в процессе $1-2$, и на некотором участке $2-x$ процесса $2-3$.

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{12} + \frac{1}{2}(P_2 + P_1)(V_2 - V_1) =$$
$$= \frac{3}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) + \frac{1}{2}(P_2 + P_1)(V_2 - V_1) =$$
$$= \frac{9}{2}P_1V_1 + \frac{3}{2}P_1V_1 = 6P_1V_1.$$

Для того, чтобы найти Q_{2x}, необходимо определить ту самую точку x, в которой перестает подводиться теплота. Это можно сделать, представив подведенную теплоту в процессе $2-x$ в виде функции от объёма $Q_{2x}(V_x)$, и найти у этой функции максимум на отрезке $V_x \in [V_2; V_3]$.

Т.к. треугольник $1-2-3$ равнобедренный, наклон процесса $1-2$ совпадает с наклоном $2-3$. Пусть $\frac{P_1}{V_1} = \alpha$, тогда $\frac{P_2-P_x}{V_x-V_2} = \alpha$, откуда $P_x(V_x) = P_2 - \alpha(V_x - V_2) = \alpha(2V_2 - V_x)$.

$$
\begin{aligned}
Q_{2x} &= \Delta U_{2x} + A_{2x};\\
\Delta U_{2x} &= 3/2 \cdot \nu R \Delta T_{2x} = 3/2 \cdot (P_x V_x - P_2 V_2) = 3\alpha/2 \cdot (V_x(2V_2 - V_x) - V_2^2)\\
&= -3\alpha/2 \cdot (V_x - V_2)^2;\\
A_{2x} &= 1/2(P_2 + P_x)(V_x - V_2) = \alpha/2 \cdot (3V_2 - V_x)(V_x - V_2);\\
Q_{2x} &= \alpha/2 \cdot \left[(3V_2 - V_x)(V_x - V_2) - 3(V_x - V_2)^2\right] =\\
&= \alpha/2 \cdot (V_x - V_2)(3V_2 - V_x - 3V_x + 3V_2) = \alpha(V_x - V_2)(3V_2 - 2V_x).
\end{aligned}
$$



К решению задачи 3.

$Q_{2x}(V_x)$ представляет собой параболу с направленными вниз ветвями и корнями V_2 и $3/2V_2 = V_3$. Вершина параболы расположена симметрично между корнями $V_x = 5/4V_2 = 5/2V_1$. Тогда подведенное количество теплоты на участке

$$
Q_{2x} = \alpha(5/2V_1 - 2V_1)(6V_1 - 5V_1) = 1/2 \cdot \alpha V_1^2 = 1/2 \cdot P_1 V_1
$$

$$
\eta = \frac{A}{Q_{12} + Q_{2x}} = \frac{P_1 V_1}{6P_1 V_1 + 1/2 \cdot P_1 V_1} = \frac{2}{13} \text{ или } \approx 15{,}4\%
$$

.

Критерии

1. Найдена работа цикла (+ 1 балл).
2. Найдено количество теплоты, подведенное в процессе $1-2$ (+ 1 балл).
3. Написано уравнение прямой процесса $2-3$ (+ 1 балл).
4. Найдено положение точки x, в которой тепло перестает подводиться (+ 5 баллов).
5. Найдено количество теплоты, подведенное на участке $2-x$ (+ 1 балл).
6. Получен правильный ответ (+ 1 балл).

Задача 4. Штирлиц получает секретные задания от радистки Кэт по обычному радиоприёмнику, настроенному на частоту 100 МГц. Радиоприёмник содержит в себе колебательный контур, резонансная частота которого соответствует частоте радиосигнала. Для того, чтобы ловить сигнал от разных радиостанций, в колебательном контуре меняют площадь перекрытия обкладок конденсатора S, тем самым меняя его ёмкость C, а индуктивность катушки L остаётся неизменной. Известно, что катушка индуктивности имеет $N = 100$ витков, радио ловит частоту 100 МГц при $S = 100$ см^2. В один момент из-за плохой изоляции в катушке замкнулись два соседних витка. На какое значение на шкале частот Штирлицу нужно будет настроить радиоприёмник, чтобы услышать сообщение радистки Кэт? Как при этом изменится значение S?

Возможное решение

Собственная частота колебательного контура определятся по формуле Томсона $2\pi\nu = \omega = 1/\sqrt{LC}$. В данной задаче нет необходимости находить точные формулы для L и C, достаточно качественно показать зависимость от изменяемых величин. Коэффициент самоиндукции катушки можно считать пропорциональным квадрату числа витков $L \sim N^2$, а ёмкость — площади перекрытия $C \sim S$. Соответственно, частота ω зависит от N и S следующим образом:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{\gamma}{\sqrt{N^2 \cdot S}} = \frac{\gamma}{N \cdot \sqrt{S}},$$

где γ — постоянный коэффициент. С точки зрения школ частот радио приёмника, номинальное значение ω зависит только от площади перекрытия, т.к. индуктивность катушки не меняется, т.е. $\omega \sim 1/\sqrt{S}$.

При замыкании двух соседних витков в катушке можно считать, что их количество уменьшается на 1: $N' = N - 1$. Теперь для того, чтобы поймать первоначальную частоту, придется изменить площадь перекрытия S, тем самым значение на шкале радиоприёмника изменится.

$$\omega = \frac{\gamma}{N \cdot \sqrt{S}} = \frac{\gamma}{N' \cdot \sqrt{S'}}$$

$$S' = S\frac{N^2}{N'^2},\ \Delta S = S' - S = S\left(\frac{N^2}{(N-1)^2} - 1\right) \simeq \frac{2S}{N-1} \simeq 2\ \text{см}^2$$

.

Новое значение, на которое надо настроить Штирлицу шкалу радиоприёмника соответствует новой площади перекрытия S' при первоначальном(!) значении N.

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S'}}$$

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{S}{S'}} = \nu\frac{N'}{N} = \nu\frac{N-1}{N} = 99\ \text{МГц}$$

.

Критерии

1. Правильно записана формула Томсона для колебательного контура (+ 1 балл).
2. Показана зависимость коэффициента самоиндукции L от N (+1 балл).
3. Показана зависимость емкости конденсатора C от площади перекрытия обкладок конденсатора S (+ 1 балл).
4. Найдено число N' витков после замыкания (+ 2 балла).
5. Получено равенство частот ω и ω' (+ 2 балла).
6. Получено измененное значение перекрытия обкладок конденсатора S' (+ 1 балл).
7. Получено новое значение частоты радиоприемника ν' (+ 2 балла).

Задача 5. В тетраэдре $ABCD$ каждое ребро представляет собой последовательно соединённые резистор и ЭДС с произвольными значениями R_i и $\mathcal{E}_i$ соответственно, где i — номер ребра, например, 1 для ребра AB, 2 — для ребра BC и т.д. В ребро AB последовательно подсоединили ключ K, а в ребро CD — идеальный амперметр. При каких условиях на R_i для любых значений $\mathcal{E}_i$ замыкание и размыкание ключа K не приведут к изменениям показаний амперметра.

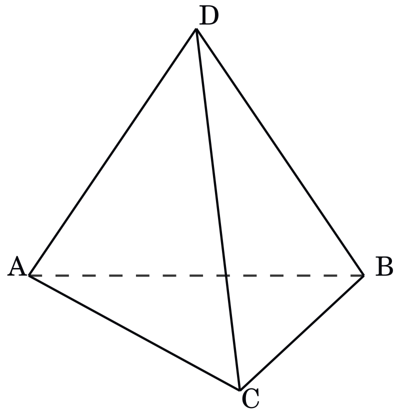
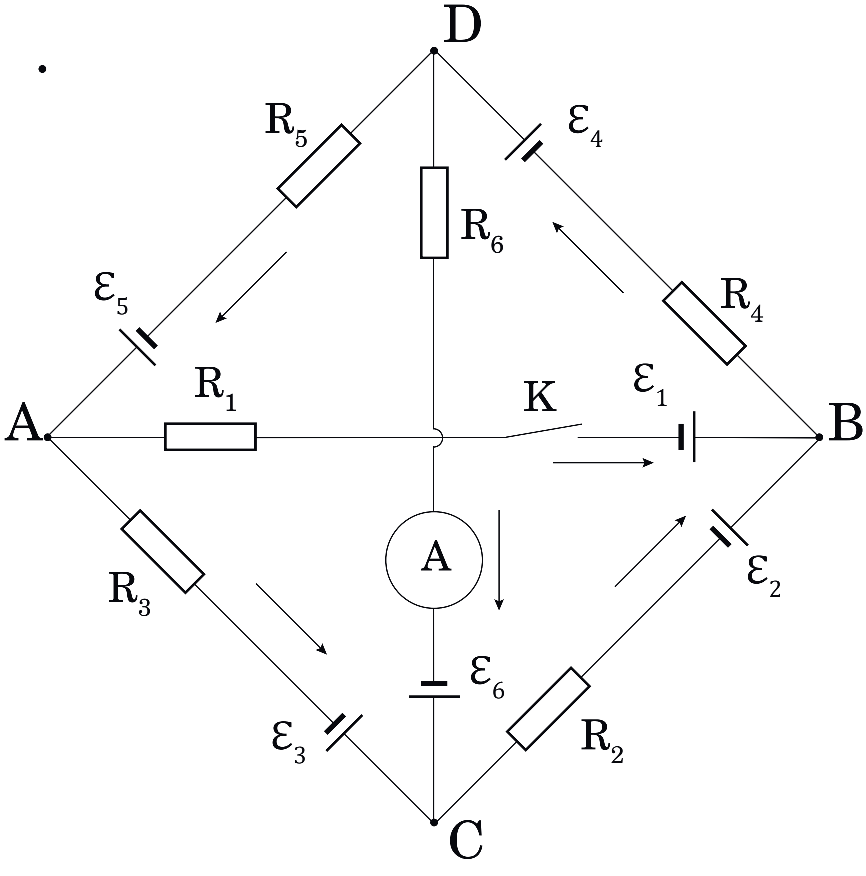


Рис. к задаче 5.

Возможное решение

Перерисуем тетраэдр в виде эквивалентной электрической схемы (Мост Уитстона) и пронумеруем элементы как показано на рисунке.



К решению задачи 5.

Запишем систему уравнений на токи и напряжения, при условии, что ключ K замкнут. Из всх возможных уравнений выберем те, которые содержат I_6, этого достаточно.

$$\begin{cases} I_3 + I_6 - I_2 = 0 & \text{узел C} \\ I_5 + I_6 - I_4 = 0 & \text{узел D} \\ I_3R_3 - I_6R_6 + I_5R_5 = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_6 + \mathcal{E}_5 & \text{контур ACD} \\ I_2R_2 + I_4R_4 + I_6R_6 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_6 & \text{контур BCD} \end{cases}$$

При размыкании ключа K ток I_1 обратится в 0, что приведет к изменению других токов, но ток I_6 по условию должен остаться неизменным. Обозначим новые токи I_2', I_3', I_4', I_5'. Для них система уравнений будет выглядеть точно так же, просто «нештрихованные» токи заменятся «штрихованными». Сопоставив эти две системы получим:

$$\begin{cases} I_3' - I_2' = I_3 - I_2 \\ I_5' - I_4' = I_5 - I_4 \\ I_3'R_3 + I_5'R_5 = I_3R_3 + I_5R_5 \\ I_3'R_3 + I_5'R_5 = I_3R_3 + I_5R_5 \end{cases} \iff \begin{cases} I_3' - I_2' = I_3 - I_2 \\ I_5' - I_4' = I_5 - I_4 \\ I_3'R_3 + I_5'R_5 = I_3R_3 + I_5R_5 \\ I_3'R_3 + I_5'R_5 = I_3R_3 + I_5R_5 \end{cases} \iff \begin{cases} I_3' - I_3 = I_2' - I_2 \\ I_5' - I_5 = I_4' - I_4 \\ R_3(I_3' - I_3) = R_2(I_2' - I_2) \\ R_5(I_5' - I_5) = R_4(I_4' - I_4) \end{cases}$$

Откуда получаем условие:

$$\frac{R_5}{R_3} = \frac{R_4}{R_2}$$

.

Также заметим, что в задаче существует тривиальное решение. При $R_{AB} = \infty$ и любых конечных значениях остальных сопротивлений, I_1 будет всегда равен 0, вне зависимости от состояния ключа K.

Критерии

1. Правильно записаны правила Кирхгофа для замкнутой цепи (+ 2 балла).
2. Правильно записаны правила Кирхгофа для цепи после размыкания ключа (+ 2 балла).
3. Получена формула балансировки сопротивлений (+ 5 баллов)
4. Рассмотрен частный случай: сопротивление R_{AB} бесконечное, все остальные сопротивления конечные (+ 1 балл)

Комментарий:

1. Написана формула балансировки сопротивлений без вывода — оценка 3 балла.

2. При отсутствии аналитического решения рассмотрены частные случаи:

а) Все $\mathcal{E}_i$ равны 0 (+ 1 балл).

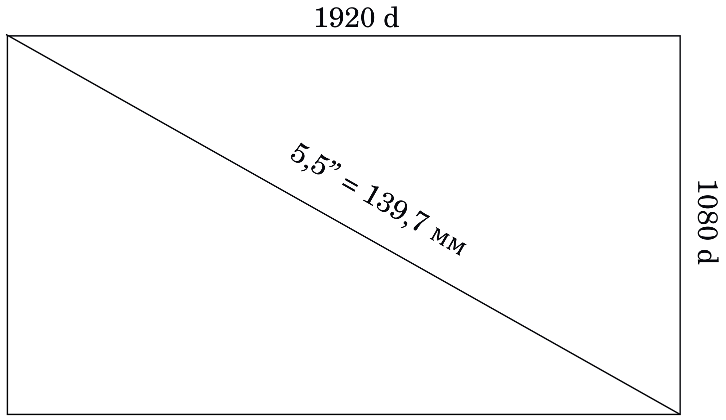
б) Сопротивление R_{AB} бесконечное, все остальные сопротивления конечные (+ 1 балл).

в) Все сопротивления R_i бесконечные (+ 1 балл).

Задача 6. Экран современного мобильного телефона может служить отражательной дифракционной решеткой. Если посмотреть на изображение удаленного точечного источника света, отраженное от выключенного экрана телефона, можно увидеть дифракционную картину (попробуйте провести данный опыт по окончании олимпиады). Возьмем технические характеристики одной популярной модели: диагональ экрана $D = 5{,}5$ дюймов, разрешение 1920 на 1080 пикселей. Определите период дифракционной решетки, соответствующей данному экрану, считая, что пиксели имеют квадратную форму. Определите угловое расстояние между максимумами первого порядка для красного света (длина волны $\lambda_1 = 650$ нм) и синего ($\lambda_2 = 450$ нм). Угол отсчитывается от нормали к поверхности экрана.

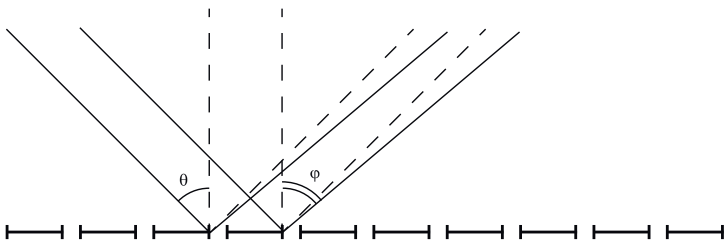
Возможное решение

Сначала определим период дифракционной решетки, решив простую геометрическую задачу, предварительно переведя диагональ экрана в мм: $c = 5{,}5'' = 139{,}7$ мм.



$$\frac{a}{b} = \frac{1920}{1080} = \frac{16}{9} \to 1080d = \frac{9}{\sqrt{9^2 + 16^2}}c \to d \approx 0{,}088 \text{ мм}$$

Пусть свет падает под углом θ к нормали экрана. Центральный максимум будет отражаться под углом θ, а максимумы высших порядков под углами ϕ_1 и ϕ_2.



Запишем условие дифракционных максимумов, определив из рисунка соответствующую разность хода.

$$\begin{cases} d(\sin\phi_1 - \sin\theta) = m\lambda_1 \\ d(\sin\phi_2 - \sin\theta) = m\lambda_2 \end{cases}$$

Для максимумов первого порядка $m = 1$. Учтем, что $\phi_i - \theta << 1$, $\phi_1 + \phi_2 \approx 2\theta$, и воспользуемся приближением малых углов $\sin x \approx x$.

$$2d \sin\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \cos\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} = \lambda_1 - \lambda_2$$

$$\Delta\phi \approx \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{d\cos\theta}$$

Значение $\cos\theta \in [0; 1]$, где 0 соответствует скользящему падению лучей, а 1 — нормальному. При комфортном наблюдении данной дифракционной картины можно считать $\cos\theta \in [\sim 0.5; 1]$. Итоговое значение $6{,}8 \cdot 10^{-3}$ рад $\geq \Delta\phi \geq 3{,}4 \cdot 10^{-3}$ рад. Ограничение «сверху» в данной задаче имеет исключительно оценочный характер.

Критерии

1. Правильно найден период дифракционной решетки (+ 2 балла).
2. Правильно записано условие нахождения дифракционных максимумов 1 порядка (+ 2 балла).
3. Правильно получена формула для углового расстояния (+ 4 балла).
4. Получен правильный численный ответ (+ 2 балла).

Комментарий:
1. Не записан порядок максимумов $m = 1$ оценка снижается на 1 балл.
2. Записанная без каких-либо пояснений формула для дифракционной решетки не оценивается.
3. Решение частного случая задачи падения света на экран при $\theta = 0^\circ$ принималось как полное решение задачи.
4. Решение задачи, в котором угловое расстояние находилось между 1 и -1 максимумами для красного и синего света принималось как полное решение задачи.