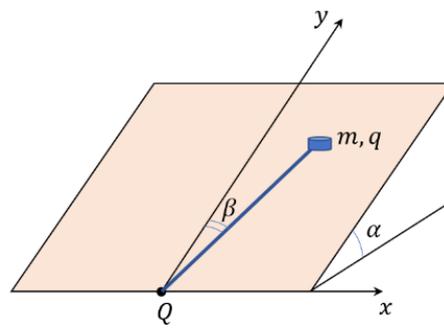


Задача 1. Система (см.рис.) состоит из двух одноименных точечных зарядов Q и q , соединенных непроводящим упругим жгутом жесткостью $\gamma = 1,0$ Н/м. Масса маленькой шайбы, несущей заряд q , равна $m = 0,20$ кг. Угол при вершине наклонной плоскости равен $\alpha = 30^\circ$, коэффициент трения шайбы о плоскость $\mu = 0,5 \operatorname{tg} \alpha$. Начальная длина жгута пренебрежимо мала ($l_0 \rightarrow 0$). В отсутствие силы тяжести расстояние между зарядами равно $r_0 = 10$ м. Считайте, что модуль силы тяжести намного меньше, чем модуль силы упругости или силы кулоновского взаимодействия в области зоны застоя. На какой максимальный угол β_{\max} может отклониться жгут от оси Oy при условии, что шайба должна находиться в положении равновесия? Определите границы зоны застоя (области, в которой шайба, отпущенная без начальной скорости, продолжает покоиться) на плоскости xOy . Изобразите схематично эту область на плоскости xOy , отразив при построении основные особенности границы этой области.

Примечание: при малых $|x| \ll 1$ справедлива приближенная формула: $(1 \pm x)^\alpha \approx 1 \pm \alpha x$.



Возможное решение

1) В отсутствие силы тяжести и силы трения равновесное расстояние r_0 между двумя зарядами определится из условия равенства модулей силы упругости $F_{\text{упр}}$ жгута и силы кулоновского отталкивания F_K зарядов:

$$\frac{kqQ}{r_0^2} = \gamma r_0.$$

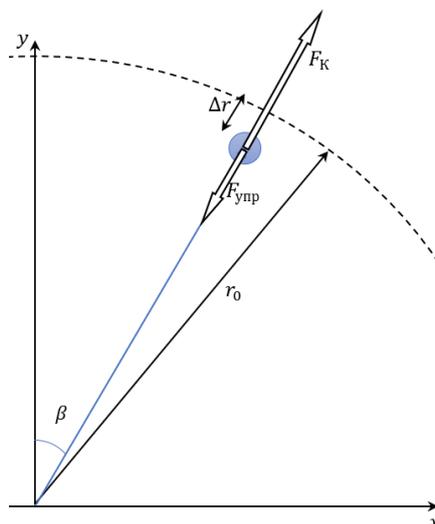


Рис. 1

Поскольку величина силы тяжести мала по сравнению с величинами $F_{\text{упр}}$ и $F_{\text{К}}$, то она смещает заряд q на расстояние $\Delta r = r - r_0$, при этом $|\Delta r| \ll r_0$. Определим, как изменяются силы $F_{\text{упр}}$ и $F_{\text{К}}$ при таком смещении:

$$F_{\text{К}}(\Delta r) = \frac{kqQ}{(r_0 + \Delta r)^2} = \frac{kqQ}{r_0^2} \left(1 + \frac{\Delta r}{r_0}\right)^{-2} \approx \frac{kqQ}{r_0^2} \left(1 - 2\frac{\Delta r}{r_0}\right),$$

$$F_{\text{упр}}(\Delta r) = \gamma(r_0 + \Delta r).$$

В таком случае проекция равнодействующей этих сил на радиальное направление равна

$$F_r(\Delta r) = F_{\text{К}}(\Delta r) - F_{\text{упр}}(\Delta r) = \frac{kqQ}{r_0^2} \left(1 - 2\frac{\Delta r}{r_0}\right) - \gamma(r_0 + \Delta r) = -3\gamma\Delta r.$$

2) Рассмотрим проекции сил, приложенных к заряду q , покоящемуся на наклонной плоскости, на плоскость xOy :

1. $mg \sin \alpha$ — проекция силы тяжести;
2. $F_r(\Delta r)$ — равнодействующая $F_{\text{упр}}$ и $F_{\text{К}}$;
3. $F_{\text{тр}} \leq \mu mg \cos \alpha$ — сила трения покоя.

Граница зоны застоя, очевидно, определяется теми точками на плоскости xOy , в которых сила трения покоя достигает максимально возможного значения $F_{\text{тр max}} = \mu mg \cos \alpha$.

Изобразим векторную диаграмму сил, иллюстрирующую равновесие заряда. За основу векторной диаграммы возьмём $mg \sin \alpha$ — постоянный по величине и направлению вектор. Окружность радиуса $\mu mg \cos \alpha < mg \sin \alpha$ с центром в конце вектора $mg \sin \alpha$ — это множество точек, в которых может размещаться конец вектора, соответствующего силе трения покоя. Вектор, дополняющий диаграмму до треугольника, — это $F_r(\Delta r)$.

Направление вектора $F_r(\Delta r)$ задает угол β . Максимальный угол отклонения жгута β_{max} определяется из диаграммы, изображенной на рисунке:

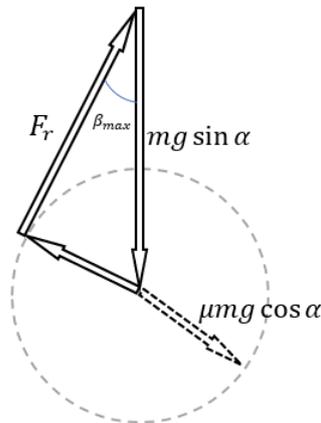


Рис. 2

$$\sin \beta_{\text{max}} = \frac{\mu mg \cos \alpha}{mg \sin \alpha} \rightarrow \beta_{\text{max}} = \arcsin \left(\frac{\mu}{\text{tg} \alpha} \right) = 30^\circ.$$

3) Величину $\Delta r(\beta_{\text{max}})$ определим, применив теорему Пифагора к векторному треугольнику:

$$(3\gamma\Delta r)^2 + (\mu mg \cos \alpha)^2 = (mg \sin \alpha)^2 \rightarrow \Delta r(\beta_{\text{max}}) = -\frac{mg \sin \alpha}{3\gamma} \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{\text{tg}^2 \alpha}}.$$

Для углов $\beta < \beta_{\max}$ существует 2 варианта возможных взаимных расположений векторов при равновесии на границе зоны застоя:

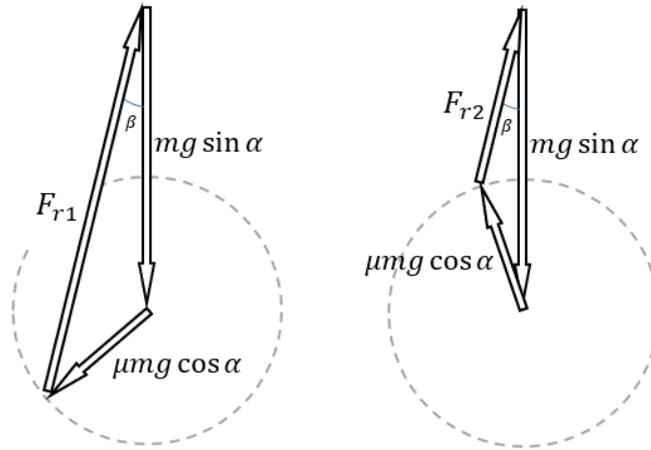


Рис. 3

По теореме косинусов (не забываем учесть, что $\Delta r < 0$):

$$(mg \sin \alpha)^2 + (3\gamma \Delta r)^2 + 6\gamma \Delta r mg \sin \alpha \cos \beta = (\mu mg \cos \alpha)^2.$$

Откуда получаем:

$$\Delta r_{1,2} = -\frac{mg \sin \alpha}{3\gamma} \left(\cos \beta \pm \sqrt{\cos^2 \beta - 1 + \frac{\mu^2}{\text{tg}^2 \alpha}} \right),$$

$$r_{1,2}(\beta) = r_0 - \frac{mg \sin \alpha}{3\gamma} \left(\cos \beta \pm \sqrt{\cos^2 \beta - 1 + \frac{\mu^2}{\text{tg}^2 \alpha}} \right).$$

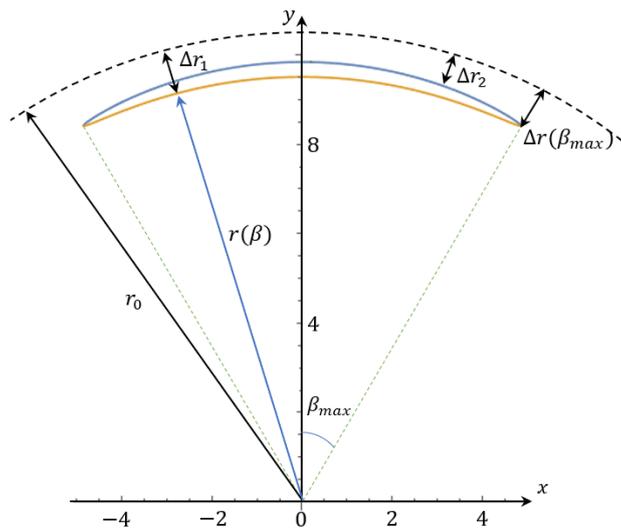


Рис. 4: Зона застоя.

Ответ:

$$\beta_{\max} = \arcsin \left(\frac{\mu}{\text{tg} \alpha} \right) = 30^\circ; \quad r_{1,2}(\beta) = r_0 - \frac{mg \sin \alpha}{3\gamma} \left(\cos \beta \pm \sqrt{\cos^2 \beta - 1 + \frac{\mu^2}{\text{tg}^2 \alpha}} \right) \text{ (см. рис.4)}.$$

Критерии

1. Получено правильное выражение для равнодействующей сил упругости и Кулона в приближении малых отклонений от равновесного состояния (+1 балл).
2. Из корректных физических соображений получено, что $\beta_{\max} = 30^\circ$ (+1 балл).
3. Показано, что для углов $\beta < \beta_{\max}$ существует 2 возможных варианта равновесия на границе зоны застоя (+1 балл).
4. Получены правильные выражения для $r_{1,2}(\beta)$, описывающие зону застоя (+1 балл).
5. Правильно изображена зона застоя, отмечены необходимые характерные особенности этой зоны (+1 балл).

Задача 2. Две маленькие шайбы массами m_1 и $m_2 = 2m_1$ находятся на оси Oy гладкой горизонтальной плоскости и связаны нерастяжимой легкой нитью длины l . Первой шайбе толчком сообщают скорость v_1 , направленную перпендикулярно нити вдоль оси Ox .

На каком расстоянии L вдоль оси Ox от второй шайбы должна находиться шайба массы $m_3 = m_2$, чтобы произошло столкновение? Какими будут скорости каждой из шайб после подобного столкновения? Считайте, что высота третьей шайбы такова, что натянутая нить проходит над этой шайбой, не задевая её.

Возможное решение

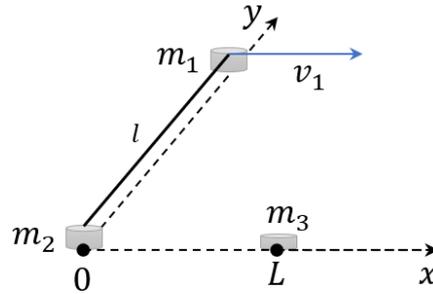


Рис. к задаче 2.

Движение шайб после приобретения первой шайбой 1 скорости v_0 в дальнейшем представляет из себя суперпозицию поступательного движения центра масс и вращательного движения шайб вокруг центра масс.

Скорость центра масс:

$$v_C = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} = \frac{v_0}{3}.$$

Положение центра масс:

$$y_C = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} = \frac{l}{3} = \text{const.}$$

Перейдём в инерциальную систему отсчета, связанную с центром масс двух шайб. В этой системе отсчета связанные шайбы вращаются с угловой скоростью $\omega = \frac{v_c}{y_c} = \frac{v_0}{l}$, а третья шайба движется со скоростью, проекция которой $v_{3x} = -v_C$. Вид сверху:

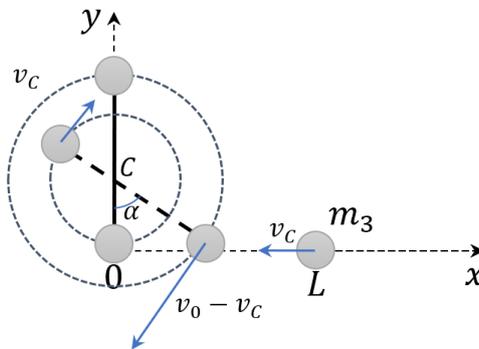


Рис. 1

Определим условия столкновения одной из связанных шайб с третьей. Столкновение шайбы массы m_2 с шайбой массы m_3 произойдёт в том случае, если связанные шайбы совершат целое число оборотов, а третья шайба окажется в начале координат:

$$\begin{cases} \omega t = 2\pi k, & k \in \mathbb{N}, \\ L + v_{3x}t = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему, найдем

$$L_k = -\frac{v_{3x}2\pi k}{\omega} = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \cdot \frac{2\pi k l}{v_0} = \frac{2\pi m_1 l}{m_1 + m_2} k = \frac{2\pi}{3} l k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В данном случае столкновения как такового не происходит, потому что относительная скорость шайб 2 и 3 в момент их встречи равна нулю, следовательно, при подобном касании скорости шайб не меняются. В лабораторной системе отсчета скорости после удара определяются выражениями:

$$\begin{cases} v_1 = v_0, \\ v_2 = 0, \\ v_3 = 0. \end{cases}$$

Столкновение шайбы 1 и 3 происходит, если шайба 1 достигает точки на оси Ox в момент, когда там оказывается шайба 3.

Запишем зависимость координат шайбы 1 и 3 от времени в системе центра масс:

$$\begin{cases} y_1 = y_C + (l - y_C) \cos(\omega t), \\ x_1 = (l - y_C) \sin(\omega t), \\ x_3 = L + v_{3x}t. \end{cases}$$

Определим моменты времени, в которые может произойти удар, из условия $y_1 = 0$:

$$\begin{aligned} y_C + (l - y_C) \cos(\omega t) &= 0, \\ \cos(\omega t) &= -\frac{y_C}{(l - y_C)} = -\frac{m_1}{m_2} \Rightarrow t = \pm \frac{1}{\omega} \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2\pi k}{\omega}, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ \sin(\omega t) &= \pm \sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}}. \end{aligned}$$

Теперь определим, на каком расстоянии должна находиться шайба 3, чтобы произошел удар:

$$\begin{aligned} (l - y_C) \sin(\omega t) &= L + v_{3x}t, \\ \pm \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}} &= L_k - \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \left(\pm \frac{1}{\omega} \arccos\left(-\frac{m_1}{m_2}\right) + \frac{2\pi k}{\omega} \right). \end{aligned}$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} L_k^+ = \frac{\sqrt{3}}{3} l + \frac{l}{3} \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k_1 \right), & k_1 = 0, 1, 2, \dots \\ L_k^- = -\frac{\sqrt{3}}{3} l + \frac{l}{3} \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k_2 \right), & k_2 = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Комментарий: решения со знаком «плюс» соответствуют столкновениям в положительной области оси Ox , со знаком «минус» – в отрицательной.

Рассматривать столкновение шайб 1 и 3 удобнее в лабораторной системе отсчета, поскольку в ней шайба 3 покоится. В силу того, что шайбы очень маленькие, можем считать удар шайб центральным.

Удар в положительной области оси Ox :

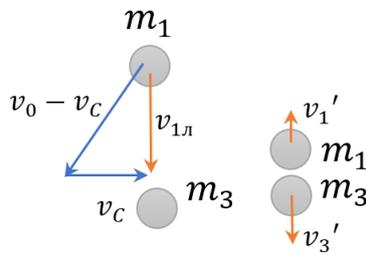


Рис. 2

Скорость шайбы 1 в лабораторной системе отсчета найдём по теореме косинусов:

$$v_1 = \sqrt{(v_0 - v_C)^2 + v_C^2 - 2v_C(v_0 - v_C) \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}v_0.$$

Заметим, что значения скоростей таковы, что треугольник, составленный из векторов скоростей является прямоугольным, т.е. вектор \vec{v}_1 направлен вертикально вниз.

Опишем соударение шайб 1 и 3 с использованием закона сохранения импульса и закона сохранения энергии. Учитывая тот факт, что удар центральный, закон сохранения импульса запишем сразу в проекции на направление движения первой шайбы:

$$\begin{cases} m_1 v_1 = -m_1 v_1' + m_3 v_3', \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_3 v_3'^2}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1' = v_1 \frac{m_3 - m_1}{m_1 + m_3} = \frac{\sqrt{3}}{9}v_0, \\ v_3' = v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}v_0. \end{cases}$$

Направление скорости шайбы 1 меняется на противоположное, нить перестает быть натянута, значит скорость 2-ой шайбы больше не изменяется до тех пор, пока нить снова не натянется или не произойдет столкновение шайб 1 и 2.

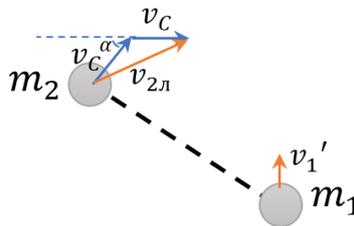


Рис. 3

Скорость шайбы 2 в лабораторной системе отсчета:

$$v_{2л} = \sqrt{v_C^2 + v_C^2 + 2v_C^2 \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}v_0.$$

Удар в отрицательной области оси Ox :

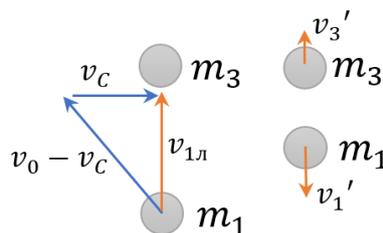


Рис. 4

Скорость шайбы 1 в лабораторной системе отсчета найдём по теореме косинусов:

$$v_1 = \sqrt{(v_0 - v_C)^2 + v_C^2 - 2v_C(v_0 - v_C)\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}v_0.$$

Заметим, что значения скоростей таковы, что треугольник, составленный из векторов скоростей является прямоугольным, т.е. вектор \vec{v}_1 направлен вертикально вниз.

В этом случае ситуация «симметричная»: вектор скорости \vec{v}_1 направлен вертикально вверх, выражения для законов сохранения энергии и импульса остаются такими же, модули скоростей после столкновения такие же, как и при ударе в положительной области оси Ox .

$$\begin{cases} v'_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}v_0, \\ v'_3 = \frac{2\sqrt{3}}{9}v_0. \end{cases}$$

Однако в подобном случае расчет конечных скоростей шайб 1 и 2 не является законченным:

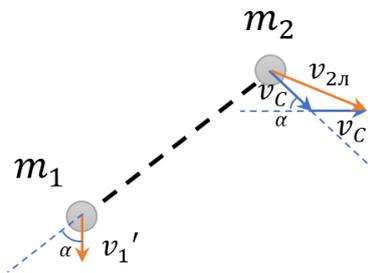


Рис. 5

Видим, что при дальнейшем движении нить должна была бы растянуться, что невозможно. Поскольку силы натяжения, действующие на шайбы, одинаковы по модулю и противоположны по направлению, выполняется закон сохранения импульса в проекции на ось, направленную вдоль нити. Компоненты импульса шайб, направленные перпендикулярно нити, не изменяются, так как нет сил, действующих на шайбы в направлении, перпендикулярном нити. Полная энергия системы также не изменяется.

$$\begin{cases} m_2 v_C \sin\alpha - m_1 v'_1 \cos\alpha = m_1 v_{1\parallel} + m_2 v_{2\parallel}, \\ \frac{m_1 (v'_1 \cos\alpha)^2}{2} + \frac{m_2 (v_C \sin\alpha)^2}{2} = \frac{m_1 v_{1\parallel}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2\parallel}^2}{2}. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_{1\parallel} = \frac{13\sqrt{3}v_0}{54}, \\ v_{2\parallel} = \frac{\sqrt{3}v_0}{54}. \end{cases}$$

Заметим на данном этапе, что после подобного взаимодействия нить перестает быть натянутой, следовательно скорости шайб 1 и 2 останутся постоянными до тех пор, пока нить снова не натянется.

С учетом того, что $v_{1\perp} = v'_1 \sin\alpha = \frac{v_0}{6}$, $v_{2\perp} = v_C + v_C \cos\alpha = \frac{v_0}{2}$, получаем окончательно:

$$\begin{cases} v''_1 = \sqrt{v_{1\parallel}^2 + v_{1\perp}^2} = \frac{7\sqrt{3}v_0}{27}, \\ v''_2 = \sqrt{v_{2\parallel}^2 + v_{2\perp}^2} = \frac{\sqrt{183}v_0}{27}. \end{cases}$$

Ответ:

1) При $L_k = \frac{2\pi}{3}lk$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} v_1 = v_0, \\ v_2 = 0, \\ v_3 = 0. \end{cases}$$

$$2) \text{ При } L_k^+ = \frac{\sqrt{3}}{3}l + \frac{l}{3} \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k_1 \right), \quad k_1 = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} v_1' = \frac{\sqrt{3}}{9}v_0, \\ v_2' = \frac{\sqrt{3}}{3}v_0, \\ v_3' = \frac{2\sqrt{3}}{9}v_0. \end{cases}$$

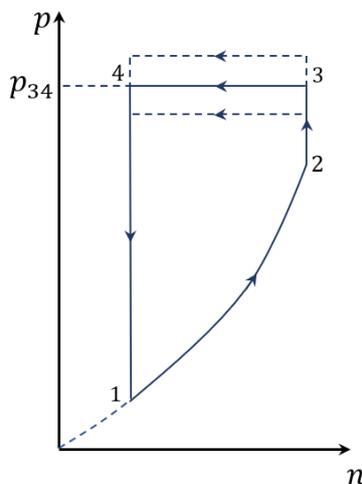
$$3) \text{ При } L_k^- = -\frac{\sqrt{3}}{3}l + \frac{l}{3} \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k_1 \right), \quad k_1 = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} v_1'' = \frac{7\sqrt{3}v_0}{27}, \\ v_2'' = \frac{\sqrt{183}v_0}{27}, \\ v_3'' = \frac{2\sqrt{3}}{9}v_0. \end{cases}$$

Критерии

1. Описано движение шайб 1 и 2 в системе центра масс (+1 балл).
2. Правильно записано условие столкновения со 2-ой шайбой, верно получены скорости трех шайб после этого столкновения (+1 балл).
3. Получены выражения для начального расстояния, на котором расположена 3-я шайба, при которых реализуется столкновение с первой шайбой (+1 балл).
4. Корректно рассмотрен абсолютно упругий удар (ЗСИ, ЗСЭ) в положительной области; отмечено, что нить перестает быть натянутой; правильно получены скорости трех шайб после этого столкновения (+1 балл).
5. Корректно рассмотрен абсолютно упругий удар (ЗСИ, ЗСЭ) в отрицательной области; отмечено, что нить натягивается после удара и происходит «удар» шайб 1 и 2 о нить; правильно получены скорости трех шайб после этого столкновения (+1 балл).

Задача 3. На $(p; n)$ -диаграмме, где n - концентрация газа, изображен циклический процесс, проводимый с $\nu = 1$ моль идеального одноатомного газа ($\gamma = 5/3$). Найдите отношение V_{\max}/V_{\min} максимального объёма газа в данном процессе к минимальному, если известно, что участок 1-2 адиабатический, имеется возможность настраивать тепловой двигатель так, чтобы давление p_{34} на участке 3-4 менялось в широком диапазоне, а максимально возможный КПД данного циклического процесса равен $\eta_{\max} = 31\%$.



Возможное решение

Введем обозначения:

$$k = \frac{V_{\max}}{V_{\min}},$$

$$s = \frac{p_{34}}{p_1}.$$

Процесс 1-2 — адиабатический, уравнение этого процесса в координатах $(p; n)$ записывается в виде:

$$p = \alpha n^\gamma,$$

$$\frac{n_2}{n_1} = k \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2}{p_1} = k^\gamma.$$

Рассчитаем КПД данного циклического процесса с использованием введенных обозначений. Отметим, что теплота подводилась на участках 2-3 — изохорный процесс и 3-4 — изобарный процесс.

$$Q_{23} = \Delta U_{23} = \frac{3}{2} (sp_1 - k^\gamma p_1) V_{\min},$$

$$Q_{34} = A_{34} + \Delta U_{34} = \frac{5}{2} sp_1 (k - 1) V_{\min}.$$

Количество отведенной теплоты определим из участка 4-1 — изохорный процесс:

$$|Q_{41}| = \frac{3}{2} (sp_1 - p_1) k V_{\min}.$$

Отсюда КПД циклического процесса:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{41}|}{Q_{23} + Q_{34}} = 1 - \frac{\frac{3}{2}(s-1)k}{\frac{3}{2}(s-k^\gamma) + \frac{5}{2}(s(k-1))} = 1 - \frac{3(s-1)k}{3(s-k^\gamma) + 5(s(k-1))}.$$

Видим, что максимальный КПД реализуется при $s \rightarrow \infty$:

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{3k}{3 + 5(k - 1)}.$$

Отсюда находим, что отношение максимального к минимальному объёму:

$$k = 3.$$

Ответ:

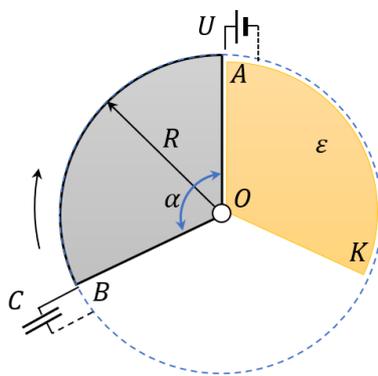
$$\frac{V_{\max}}{V_{\min}} = 3.$$

Критерии

1. Правильно изображен график процесса в $(p; V)$ -координатах (+1 балл).
2. Получены правильные выражения для теплот на каждом из участков циклического процесса (либо аналогичные, позволяющие найти эти теплоты) (+1 балл).
3. Получено правильное выражение для КПД циклического процесса (+1 балл).
4. Правильно записано условие максимальности КПД (+1 балл).
5. Получен правильный числовой ответ (+1 балл).

Задача 4. Электродвигатель состоит из двух параллельных металлических пластин, в виде двух секторов круга радиуса $R = 50$ см с центральным углом $\alpha = 120^\circ$, закрепленных на непроводящем валу (обозначен O на рисунке) на расстоянии $d = 2,0$ см друг над другом. В точках A и B при помощи двух пар проводящих щёток (одна сверху, вторая снизу) подключены источник постоянного напряжения $U = 220$ В и изначально незаряженный конденсатор ёмкостью $C = 1,0$ мФ соответственно. В секторе $АOK$ с центральным углом α расположен неподвижный слой диэлектрика толщины немного меньшей d , диэлектрическая проницаемость которого равна $\varepsilon = 6,5$. Двигатель вращает вал с пластинами, его мощность регулируется таким образом, чтобы вращение вала было равномерным. Период одного полного оборота генератора составляет $T = 10$ с.

Какой заряд q_1 передается конденсатору таким генератором за первый полный оборот из состояния, изображенного на рисунке? Какой максимальный заряд q_{\max} может быть передан конденсатору в такой системе? Какова максимальная мощность P_{\max} двигателя, приводящего пластины генератора во вращение?



Возможное решение

1. Определим ёмкость C_0 конденсатора, состоящего из двух пластин, закрепленных на валу:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \alpha R^2}{2d}.$$

При первом контакте с источником практически мгновенно заряд пластин становится равным:

$$q_0 = C_0 U.$$

В момент, когда диэлектрик заполняет всё пространство между пластинами, ёмкость становится равной:

$$C' = \varepsilon C_0.$$

Заряд, накапливаемый пластинами за время контакта с источником, определяется выражением:

$$q_0' = C' U = \varepsilon C_0 U.$$

Важно заметить, что диэлектрик остаётся неподвижен, то есть при прохождении следующей трети круга ёмкость конденсатора уменьшится до исходного значения C_0 , но при отключенном источнике изменения заряда пластин не произойдёт.

При первом контакте с незаряженным конденсатором заряд перераспределяется в соответствии

с законом сохранения электрического заряда и условием равенства потенциалов пластин:

$$\begin{cases} q_0' = q + q_1, \\ \frac{q}{C_0} = \frac{q_1}{C}. \end{cases} \Rightarrow q_1 = \frac{Cq_0'}{C + C_0} = \frac{\varepsilon C C_0 U}{C + C_0} = 0,17 \text{ мкКл.}$$

2. Процесс зарядки конденсатора C заканчивается тогда, когда напряжение между его обкладками становится равным напряжению между пластинами сразу после покидания пластинами диэлектрика:

$$U_{\max} = \frac{q_0}{C_0} = \varepsilon U.$$

Следовательно, максимальный заряд, накопленный на конденсаторе, равен:

$$q_{\max} = C U_{\max} = \varepsilon C U = 1,4 \text{ Кл.}$$

3. Для того, чтобы поддерживать угловую скорость вращения вала и пластин постоянной, двигатель работает с некоторой мощностью. Помимо этого источник напряжения также совершает работу по переносу заряда. Уравнение энергетического баланса в таком случае выглядит следующим образом:

$$P dt + U dq = dW_c.$$

Разобьём один полный оборот на несколько этапов, чтобы понять, в какой момент мощность двигателя максимальна.

Этап 1. Первый контакт пластин и источника напряжения при $t = 0$.

Так как сопротивления элементов пренебрежимо малы, то зарядка пластин происходит практически мгновенно. Работа, совершенная источником в этот момент, равна $A_{\text{ист}} = q_0 U$, энергия, запасенная в пластинах, составляет $W_{C_0} = \frac{q_0 U}{2}$. Важно отметить, что половина работы источника в таком случае всё равно выделяется в виде теплоты на пусть и малом, но тем не менее существующем, сопротивлении проводов. Также в момент подключения пластин генератора к щеткам мог образоваться газоразрядный канал - искра, на которую также расходуется энергия, так что энергетический баланс всё равно будет соблюден.

Этап 2. Первая треть полного оборота, диэлектрик частично заполняет конденсатор, $t \in (0; \frac{1}{3}T)$.

Ёмкость конденсатора возрастает при подключенном источнике напряжения, т.е. напряжение на пластинах поддерживается постоянным, заряд обкладок растёт.

$$C(t) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \omega t R^2}{2d} + \frac{\varepsilon_0 (\alpha - \omega t) R^2}{2d}.$$

За малый промежуток времени ёмкость возрастает на величину:

$$dC = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \omega R^2}{2d} dt.$$

Заряд, прошедший через источник за это время:

$$dq = U dC.$$

Энергетический баланс на данном этапе:

$$P_{1/3}(t)dt + U^2 dC = \frac{U^2}{2} dC.$$

Отсюда мощность двигателя:

$$P_{1/3} = -\frac{U^2}{2} \frac{dC}{dt} = -\frac{U^2 \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \omega R^2}{4d} = -4,6 \text{ мкВт.}$$

Видим, что мощность двигателя постоянна и отрицательна, двигателю приходится «притормаживать» пластины для поддержания равномерного вращения.

Этап 3. Контакт с источником потерян, диэлектрик постепенно покидает пространство между пластинами, $t \in [\frac{1}{3}T; \frac{2}{3}T]$.

На данном этапе ёмкость конденсатора уменьшается при отключенном источнике напряжения, работа двигателя расходуется на изменение энергии конденсатора.

Для удобства рассмотрения процесса введем переменную $\tau = t - \frac{T}{3}$, являющуюся временем, отсчитываемым от начала третьего этапа.

$$C(\tau) = \frac{\varepsilon_0 \omega \tau R^2}{2d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon (\alpha - \omega \tau) R^2}{2d}.$$

Изменение емкости за малый промежуток времени $d\tau$:

$$dC = -\frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \omega R^2}{2d} d\tau.$$

Энергетический баланс на данном этапе:

$$P(\tau) d\tau = dW_C,$$

$$\begin{aligned} P(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{q^2}{2C} \right) = -\frac{(\varepsilon C_0 U)^2 dC}{2C^2} \frac{dC}{d\tau} = \frac{\left(\varepsilon \frac{\varepsilon_0 \alpha R^2}{2d} U \right)^2}{2 \left(\frac{\varepsilon_0 \omega \tau R^2}{2d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon (\alpha - \omega \tau) R^2}{2d} \right)^2} \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \omega R^2}{2d} = \\ &= \frac{\varepsilon^2 \alpha^2 U^2 \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \omega R^2}{4d} \frac{1}{(\varepsilon \alpha - (\varepsilon - 1) \omega \tau)^2}. \end{aligned}$$

Очевидно, что мощность двигателя должна быть максимальна в момент $\tau = \frac{T}{3}$, то есть в самом конце этапа 3.

$$P_{\max} = \frac{U^2 \varepsilon_0 \varepsilon^2 (\varepsilon - 1) \omega R^2}{4d} = \varepsilon^2 |P_{1/3}| = 0,20 \text{ мВт.}$$

Этап 4. $t \in [\frac{2}{3}T; T]$.

Весь оставшийся промежуток времени мощность для поддержания вращения не нужна.

Ответ:

$$1) q_1 = 0,17 \text{ мкКл; } 2) q_{\max} = 1,4 \text{ Кл; } 3) P_{\max} = 0,20 \text{ мВт.}$$

Критерии

1. Получено правильное выражение и численное значение для заряда, переданного конденсатору за один полный оборот (+1 балл).

2. Получено правильное выражение и численное значение для максимального заряда на конденсаторе (+1 балл).
3. Правильно записано условие энергетического баланса на каждом из промежутков периода (+1 балл).
4. Получены правильные выражения для механической мощности генератора на каждом из промежутков периода (+1 балл).
5. Получено правильное выражение и численное значение для максимальной механической мощности генератора (+1 балл).

Задача 5. При исследовании оптических свойств прозрачного шара радиуса R была получена зависимость угла отклонения $\theta(x)$ луча от своего первоначального направления. Измерения проводили во всем доступном диапазоне $x \in [0, R]$. Лаборант построил график этой зависимости, отложив по вертикали угол отклонения θ в градусах, а по горизонтали – расстояние x в см, однако вечером уборщица порвала его и выбросила. Наутро лаборант в ужасе обнаружил только два кусочка этого графика, а таблицу измерений так и не смог найти. Помогите лаборанту подготовить отчет по сохранившейся информации: определите показатель преломления n вещества шара, радиус R шара, расстояние l от центра шара до точки, в которой фокусируется пучок световых лучей, испущенный вдоль диаметра шара на малых расстояниях $x \ll R$.

Примечание: при малых углах α [рад] $\ll 1$ справедлива формула $\sin \alpha \approx \alpha$ [рад].

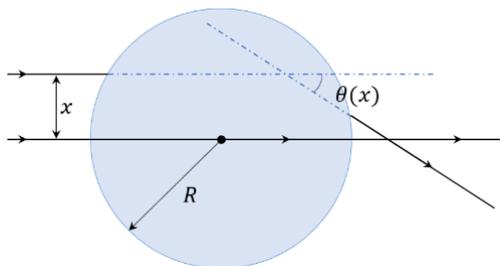


Рис. к задаче 5.

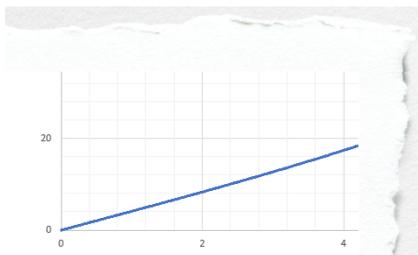


Рис.(а) Левый нижний угол

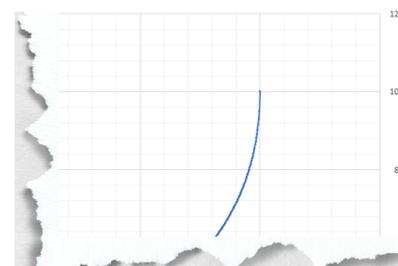


Рис.(б) Правый верхний угол

Возможное решение

Построим ход произвольного луча:

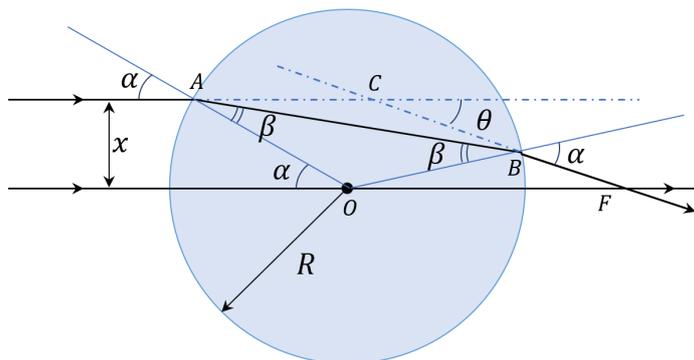


Рис. 1

В соответствии с законом преломления

$$\sin \alpha = n \sin \beta.$$

Из геометрических соображений:

$$\sin \alpha = \frac{x}{R}.$$

Заметим, что угол θ является внешним углом треугольника $\triangle ABC$, следовательно, он равен сумме двух несмежных с ним углов:

$$\theta(x) = \angle CAB + \angle CBA = 2(\alpha - \beta) = 2 \left(\arcsin \left(\frac{x}{R} \right) - \arcsin \left(\frac{x}{nR} \right) \right).$$

Рассмотрим внимательно имеющиеся у нас отрывки графиков. На одном из них мы видим верхнюю правую часть графика, а также значение максимального угла отклонения:

$$\theta_{\max} \approx 100^\circ.$$

Максимальный угол отклонения наблюдается в случае, если $x \rightarrow R$:

$$\theta_{\max} = \theta(x \rightarrow R) = 2 \left(1 - \arcsin \left(\frac{1}{n} \right) \right).$$

Определим из этого соотношения показатель преломления вещества прозрачного шара:

$$n = \frac{1}{\sin \left(90^\circ - \frac{\theta_{\max}}{2} \right)} \approx 1,56.$$

Теперь рассмотрим часть графика, соответствующую малым $x \ll R$. Видим, что эта часть графика практически линейна, то есть зависимость $\theta(x)$ имеет вид:

$$\theta(x) = kx.$$

Угловой коэффициент найдём из графика:

$$k = 4,0 \frac{^\circ}{\text{см}} = 0,070 \frac{\text{рад}}{\text{см}}.$$

При малых x , угол α [рад] $\ll 1$, следовательно можно воспользоваться примечанием:

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{x}{R}.$$

В таком случае закон преломления запишется в виде $\alpha = n\beta$, при этом угол отклонения луча:

$$\theta(x) = 2(\alpha - \beta) = \frac{2x}{R} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \rightarrow k = \frac{2}{R} \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Отсюда радиус шара:

$$R = \frac{2}{k} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 10 \text{ см.}$$

Для определения расстояния, на котором фокусируются лучи, отметим, что треугольник $\triangle OFC$ – равнобедренный.

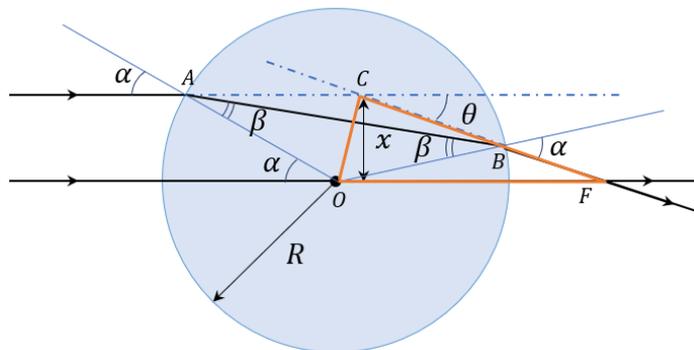


Рис. 2

В самом деле, CO является общей высотой равнобедренных треугольников $\triangle ACB$ и $\triangle AOB$, а

следовательно и биссектрисой углов при вершинах этих треугольников. Отсюда

$$\begin{aligned}\angle OCF &= \frac{1}{2}(\pi - 2(\alpha - \beta)) = \frac{\pi}{2} - \alpha + \beta, \\ \angle COF &= \pi - \angle CFO - \angle OCF = \pi - \theta - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha + \beta.\end{aligned}$$

Высота $\triangle OFC$, опущенная из вершины C равна x , а боковые стороны равны $CF = OF = l$. Площадь этого треугольника:

$$S = \frac{1}{2}l^2 \sin \theta = \frac{1}{2}xl \rightarrow l = \frac{x}{\sin \theta} \approx \frac{x}{\theta}.$$

Подставляя выражение для θ , получаем:

$$l = \frac{x}{\frac{2x}{R} \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{Rn}{2(n-1)} = 14 \text{ см.}$$

Отдельно стоит отметить, что полученное выражение справедливо только для случаев $n \leq 2$ (подумайте, почему?).

Альтернативный способ найти расстояние, на котором фокусируются лучи

Рассмотрим $\triangle OBF$: $\angle OBF = \pi - \alpha$, $\angle BFO = \theta$, $OB = R$, $OF = l$. По теореме синусов:

$$\frac{R}{\sin \theta} = \frac{l}{\sin(\pi - \alpha)}.$$

Подставим выражение для угла θ , воспользуемся формулой приведения ($\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$) и учтем, что углы малые и $\alpha = n\beta$.

$$\frac{R}{2(n\beta - \beta)} = \frac{l}{n\beta} \Rightarrow l = \frac{Rn}{2(n-1)}.$$

Альтернативный способ №2 найти расстояние, на котором фокусируются лучи

Воспользуемся формулой «шлифовщика» или законом преломления на сферической поверхности. Параллельный пучок лучей соответствует бесконечно удаленному источнику. Преломление на первой сферической поверхности:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1} + \frac{n}{b_1} &= \frac{n-1}{R}, \quad a_1 \rightarrow \infty \\ b_1 &= \frac{nR}{n-1}.\end{aligned}$$

Вторая поверхность находится на расстоянии $2R$ от первой, поэтому $a_2 = -(b_1 - 2R)$. Знак «минус» соответствует сходящемуся пучку световых лучей, падающих на вторую поверхность.

Второе преломление:

$$\frac{n}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1-n}{-R} \Rightarrow b_2 = \frac{R(2-n)}{2(n-1)}.$$

Искомое расстояние:

$$l = b_2 + R = \frac{R(2-n)}{2(n-1)} + R = \frac{Rn}{2(n-1)}.$$

Ответ:

$$1) n \approx 1,56; \quad 2) R = 10 \text{ см}; \quad 3) l = 14 \text{ см.}$$

Критерии

1. Правильно построен ход лучей в прозрачном шаре (+1 балл).
2. Из корректных физических соображений правильно получено выражение и численные значения для показателя преломления вещества шара (+1 балл).
3. Из корректных физических соображений правильно получено выражение и численные значения для радиуса шара (+1 балл).
4. Из корректных физических соображений правильно получено выражение и численные значения для фокусного расстояния в параксиальном приближении (+2 балла).