

Задача 1. Даша опускает тело в форме кирпича с квадратным основанием в воду сначала одной квадратной гранью, затем другой. В обоих случаях кирпич плавает, и Даша делает отметку на кирпиче в том месте, где он соприкасается с водой. Оказалось, что расстояние между двумя отметками равно $h = 5$ см. Считая, что каждый раз кирпич погружался в воду меньше, чем наполовину, рассчитайте длину наибольшего ребра L . Плотность тела однородна и равна $\rho = 400$ кг/м³, плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м³.

Возможное решение

1) Обозначим часть кирпича, непогруженную в воду через x . Тогда длина наибольшего ребра L выражается как $L = 2x + h$, откуда $x = \frac{L-h}{2}$.

2) Обозначим ребро квадратной грани кирпича через a и запишем уравнение баланса:

$$\begin{aligned}F_{\text{Архимеда}} &= F_{\text{тяжести}}, \\x \cdot a^2 \cdot \rho_{\text{в}} \cdot g &= L \cdot a^2 \cdot \rho \cdot g, \\L &= \frac{h}{1 - 2 \cdot \rho / \rho_{\text{в}}} = 25 \text{ см.}\end{aligned}$$

Ответ:

$$L = 25 \text{ см.}$$

Критерии

1. Верно получено выражение для части кирпича, которая погружена в воду. (+1 балл)
2. Верно записана сила Архимеда. (+1 балл)
3. Верно записана сила тяжести. (+1 балл)
4. Получен верный численный ответ. (+ 2 балла)

Задача 2. Жители α -Центавра, Саша и Вова, наблюдают за движением космических судов в поясе астероидов в их звездной системе. Они заметили, что большинство космических поездов, пролетающих мимо определённого астероида в поясе, не совершают на нём посадку. Они предполагают, что это происходит из-за того, что астероид слишком мал и неудобен для посадки, так как максимальная длина его посадочной платформы составляет всего $l = 300$ м. Саша заметил, что один из космических поездов пролетает начало платформы за время $t_1 = 25$ с. В то же время Вова заметил, что преодоление всей посадочной платформы астероида поездом занимает время $t_2 = 42$ с. На сколько метров необходимо увеличить размер посадочной платформы, чтобы пролетающий поезд смог совершить на нём посадку? В ответе укажите минимальное целое число. Считать, что космические поезда движутся равномерно. Длину посадочной платформы астероида считать достаточной, если она больше или равна длине космического поезда.

Возможное решение

1) Обозначим скорость корабля за v . Время, за которое корабль преодолевает начало платформы равно t_1 по условию. Заметим, что в таком случае длина корабля x будет равна $x = vt_1$.

2) В то же время Вова заметил, что преодоление всей посадочной платформы астероида поездом занимает время $t_2 = 42$ с. Оно включает в себя прохождение кораблем начала платформы, и время, за которое конец корабля преодолеет всю платформу астероида. В таком случае

$$t_2 = t_1 + \frac{l}{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{l}{t_2 - t_1} \Rightarrow x = \frac{l}{t_2 - t_1} t_1.$$

3) Тогда для совершения посадки на астероиде размер посадочной платформы необходимо увеличить на величину

$$\Delta l = x - l = \frac{l \cdot t_1}{t_2 - t_1} - l = 141,2 \text{ м.}$$

А минимальное целое число составит $\Delta l = 142$ м.

Ответ:

$$\Delta l = 142 \text{ м.}$$

Критерии

1. Верно получено время, требуемое для прохождения всей посадочной платформы астероида. (+2 балла)
2. Верно получена скорость космического поезда. (+1 балл)
3. Верно получен нужный размер посадочной платформы на астероиде. (+1 балл)
4. Получен верный численный ответ. (+ 1 балл)

Задача 3. На рисунке приведена система рычагов. Все рычаги находятся в горизонтальном положении. Два груза массами m и M закреплены на тонких нерастяжимых невесомых нитях на плечах большого рычага и на соответствующих плечах малых рычагов, как показано на рисунке. Внутренние плечи малых рычагов связаны натянутой нерастяжимой невесомой нитью. Длины плеч всех рычагов отмечены на рисунке. Найдите отношение $\frac{m}{M}$, если известно, что сила, действующая на левое плечо большого рычага, равна половине силы тяжести, действующей на груз массы m .

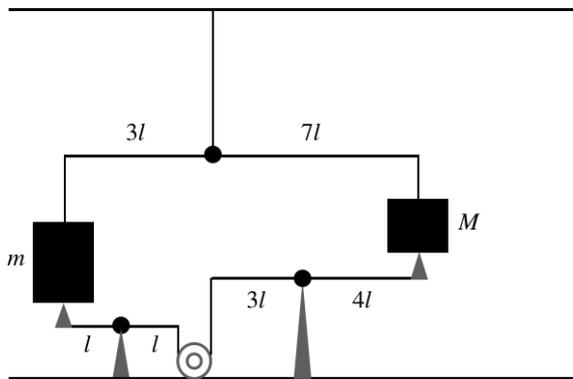


Рис. к задаче 3

Возможное решение

1) Обозначим силы, действующие на левое и правое плечи большого рычага как T_1 и T_2 соответственно. Из условия равновесия для большого рычага получаем:

$$T_1 \cdot 3l = T_2 \cdot 7l,$$

$$T_2 = \frac{3}{7}T_1.$$

По условию $T_1 = \frac{mg}{2}$, откуда

$$T_2 = \frac{3}{14}mg.$$

2) Запишем условия равновесия для малых рычагов, обозначив силу натяжения внутренней нити между плечами малых рычагов за T_3 :

$$(mg - T_1) \cdot l = T_3 \cdot l \Rightarrow \frac{mg}{2} \cdot l = T_3 \cdot l,$$

$$(Mg - T_2) \cdot 4l = T_3 \cdot 3l \Rightarrow (Mg - \frac{3}{14}mg) \cdot 4l = T_3 \cdot 3l.$$

Откуда получаем:

$$\frac{1}{2}mg = \frac{4}{3}Mg - \frac{4}{14}mg,$$

$$\frac{11}{14}mg = \frac{4}{3}Mg,$$

$$\frac{m}{M} = \frac{56}{33}.$$

Ответ:

$$\frac{m}{M} = \frac{56}{33}.$$

Критерии

1. Верно записано условие равновесия верхнего рычага. (+1 балла)
2. Верно записаны условия равновесия нижних рычагов. (+2 балла)
3. Получено уравнение, связывающее массы m и M . (+1 балл)
4. Получен правильный численный ответ. (+1 балл)

Задача 4. При заваривании чая чайники, помещённые в воду, сначала плавают на поверхности воды, а затем медленно опускаются на дно чайника. Это связано с изменением массы и объёма чайников при контакте с водой. Сразу после попадания в чайник чайники погружены в воду на 70% своего объёма. Через некоторое время масса чайников увеличивается на 50%. При каком максимально возможном увеличении своего объёма чайники начнут опускаться на дно? Ответ дайте в процентах от исходного значения объёма чайников.

Возможное решение

1) Запишем равенство сил в начальный момент времени при условии, что чайники плавают на поверхности:

$$0,7 \rho_{\text{в}} V_0 g = m_0 g,$$

где m_0 и V_0 – начальные масса и объём чайников.

2) Чайники начинают тонуть, когда выполнено условие

$$\rho_{\text{в}} V_1 g \leq 1,5 m_0 g,$$

где V_1 – новое значение объёма чайников. Из первого условия получаем:

$$\rho_{\text{в}} V_1 g \leq 1,5 \cdot 0,7 \rho_{\text{в}} V_0 g,$$

$$V_1 \leq 1,5 \cdot 0,7 V_0 = 1,05 V_0.$$

Таким образом, максимально возможное увеличение объёма чайники составляет 5%.

Ответ:

5%.

Критерии

1. Верно записано условие плавания чайников. (+1 балла)
2. Верно записано условие на максимальный объём чайников, при котором они погружаются на дно. (+2 балла)
3. Получена связь максимально возможного объёма чайников с их исходным объёмом. (+1 балл)
4. Получен правильный численный ответ. (+1 балл)

Задача 5. Вероника купила в супермаркете некоторое количество сыра, представляющего собой кубик размерами $5 \text{ см} \times 5 \text{ см} \times 5 \text{ см}$ для необычных экспериментов с динамометром. Внутри сыра имеются дырки, которые образуются в процессе его созревания. Сначала она измерила вес сыра, погрузив его целиком в воду, и получила $P_1 = 0,26 \text{ Н}$. Дополнительно Вероника расплавила сыр на водяной бане, отметив, что масса сыра после его затвердевания не изменилась, а объём уменьшился на 10%. Определите плотность монолитного сыра без дырок по результатам эксперимента Вероники, предполагая, что после его расплавления и затвердевания дырок в сыре не осталось. Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1 \text{ г/см}^3$. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ кг/(м} \cdot \text{с}^2)$.

Возможное решение

1) Запишем массу M целого куска сыра, разделив составляющие дырок и сыра:

$$M = \rho_d V_d + \rho_c V_c = \rho_d V_d + \rho_c (V - V_d) = \rho_c V - (\rho_c - \rho_d) V_d,$$

где ρ_d и ρ_c – плотность дырок и плотность монолитного сыра соответственно, а V_d , V_c и V – объём всех дырок, объём монолитного сыра и суммарный объём сыра (дан в условиях задачи) соответственно.

2) Запишем выражение для веса P_1 , фиксируемого динамометром при погружении сыра в воду (подставим при этом найденное выражение для массы целого куска сыра):

$$P_1 = Mg - \rho_{\text{в}} V g = \rho_c V g - (\rho_c - \rho_d) V_d g - \rho_{\text{в}} V g \Rightarrow$$

$$V_d = \frac{(\rho_c - \rho_{\text{в}}) V - \frac{P_1}{g}}{\rho_c - \rho_d}.$$

3) Известно, что объём сыра после его затвердевания уменьшился на 10%, тогда верно

$$V - V_d = 0,9 V \Rightarrow V_d = 0,1 V.$$

4) Заметим, что плотность дырок, а если быть точным плотность воздуха, заполняющего дырки, мала по сравнению с плотностями твердых тел \Rightarrow плотностью дырок в данной задаче можно пренебречь. Тогда будет верно

$$\rho_c = \frac{\frac{P_1}{g} + \rho_{\text{в}} V}{V - V_d} = \frac{\frac{P_1}{g} + \rho_{\text{в}} V}{0,9 V} = \frac{10}{9} \left(\frac{P_1}{Vg} + \rho_{\text{в}} \right).$$

Подставляя известные значения, находим искомую плотность монолитного сыра:

$$\rho_c \approx 1,34 \text{ г/см}^3.$$

Ответ:

$$\rho_c \approx 1,34 \text{ г/см}^3.$$

Критерии

1. Верно записано выражение для веса, фиксируемого динамометром. (+ 2 балла)
2. Верно выражен объём дырок в сыре. (+ 1 балл)
3. Получена связь плотности сыра с весом, фиксируемым динамометром. (+ 1 балл)
4. Получен верный численный ответ. (+ 1 балл)