10 класс

Задача 10.1. Дано число $2^{2024} \cdot 3^{2023} \cdot 5^{2022}$. Можно ли расставить все его делители, кроме единицы, по кругу так, чтобы любые два соседних числа не были взаимно просты?

Ответ: Да, можно.

Решение. Поставим сначала числа $d_1 = 2 \cdot 3$, $d_2 = 3 \cdot 5$ и $d_3 = 5 \cdot 2$, а затем будем расставлять оставшиеся делители между ними. Между числами d_1 и d_2 в произвольном порядке поставим все делители, кратные 3. Ясно, что все такие делители не взаимно просты друг с другом, а также с делителями d_1 и d_2, поскольку все они делятся на 3. Далее, между числами d_2 и d_3 поставим все оставшиеся делители, кратные 5. Все эти делители вместе с числами d_2 и d_3 не взаимно просты, т.к. кратны 5. Наконец, поставим между d_3 и d_1 все оставшиеся делители. Поскольку все делители, кратные 3 или 5, уже расставлены, то эти оставшиеся делителя на самом деле в точности степени двойки. Поэтому они и делители d_1 и d_3 все делятся на 2 и также не взаимно просты. Значит, полученная нами расстановка удовлетворяет условию.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 6 б. Все делители верно расставлены в ряд, а не по кругу, при этом первый и последний делители не взаимно просты.
- 2 б. Все делители верно расставлены в ряд, а не по кругу, при этом первый и последний делители взаимно просты .
- 4 б. В решении присутствует идея рассмотрения трех делителей, имеющих вид $2^\alpha \cdot 3^\beta$, $3^a \cdot 5^b$ и $5^m \cdot 2^n$, но окончательная расстановка делителей не верна, поскольку не все делители расставлены.
- 2 б. В решении присутствует идея рассмотрения трёх делителей, имеющих вид $2^\alpha \cdot 3^\beta$, $3^a \cdot 5^b$ и $5^m \cdot 2^n$, но окончательная расстановка делителей не получена.

Задача 10.2. Сколько решений в вещественных числах имеет уравнение $(x-1)^3 = \{(x+1)^3\}$ (здесь $\{t\}$ обозначает дробную часть числа t)?

Ответ: 18.

Решение. Заметим, что по определению дробной части числа справедливы неравенства $0 \leqslant \{(x+1)^3\} < 1$, откуда

$$0 \leqslant (x-1)^3 < 1 \text{ и } 1 \leqslant x < 2.$$

Преобразуем наше уравнение:

$$(x-1)^3 = \{(x+1)^3\} = \{x^3+3x^2+3x+1\} = \{(x-1)^3 + (6x^2+2)\}.$$

Поскольку число $(x-1)^3$ лежит в промежутке $[0;1)$, оно совпадает со своей дробной частью. Значит, число $6x^2+2$ должно быть целым.

Так как $1 \leqslant x < 2$, то $1 \leqslant x^2 < 4$ и $8 \leqslant 6x^2+2 < 26$. Поэтому число $6x^2+2$ может принимать любое из целых значений на отрезке $[8;25]$, и для каждого такого значения существует ровно один x из промежутка $[1;2)$, который реализует это значение. В результате мы получаем 18 ответов.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 6 б. Решение в целом верное, но неправильно посчитано количество целых точек на отрезке $[8;25]$.
- 3 б. Доказано, что число $6x^2+2$ должно быть целым, но решение не завершено.
- 1 б. Получены оценки $1 \leqslant x < 2$, других продвижений нет.

Задача 10.3. Последовательность чисел a_n определяется условиями $a_1 = 20$, $a_2 = 50$, $a_{n+1} = a_{n-1} - \frac{3}{a_n}$. Найдите номер первого отрицательного члена этой последовательности.

Ответ: $n = 336$.

Решение. Перепишем рекуррентное условие последовательности как

$$a_{n+1}a_n = a_n a_{n-1} - 3.$$

Значит, произведение соседних членов последовательности каждый раз уменьшается на 3. Оба начальных члена последовательности положительны, значит, пока это произведение положительно, каждый следующий член последовательности будет оставаться положительным. $a_1 a_2 = 1000$, значит,

$$a_n a_{n+1} = 1000 - 3(n-1).$$

Первый раз это произведение станет отрицательным при $n = 335$, значит, a_{336} будет первым отрицательным членом последовательности.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

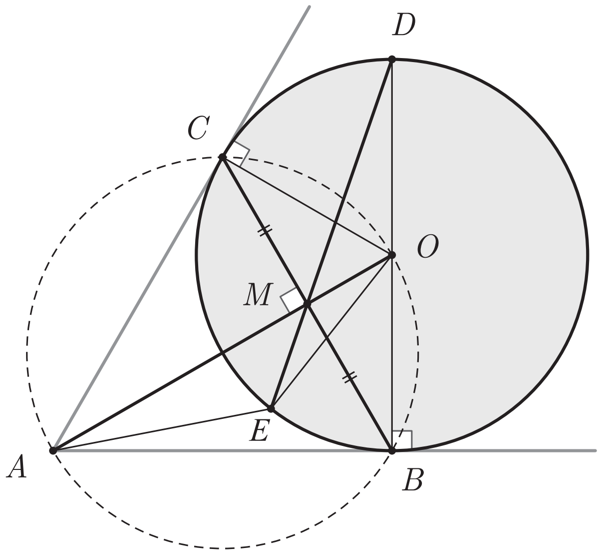
- 5 б. В целом решение верное, однако получен неверный ответ из-за логической или арифметической ошибки.

Задача 10.4. Окружность с диаметром BD касается сторон угла A в точках B и C. Её хорда DE проходит через середину хорды BC, а отрезок AD пересекает окружность в точке F.

а) Докажите, что хорды EF и BC параллельны;
б) Найдите отношение $EF : BC$, если угол BAC равен $60°$.

Ответ: $3 : 7$

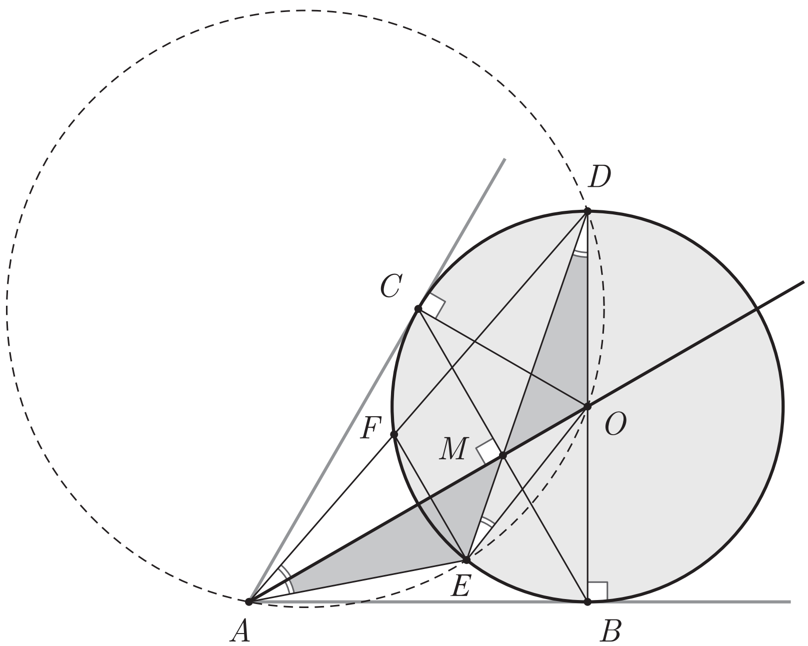
Решение. а) Радиусы OB и OC окружности перпендикулярны сторонам угла по свойству касательной. Поэтому точки B и C лежат на окружности с диаметром OA. (рис 1)



По теореме о произведении отрезков хорд этой окружности $BM \cdot CM = AM \cdot OM$.

С другой стороны, по той же теореме для хорд BC и DE окружности, данной в условии задачи, имеем, что $BM \cdot CM = DE \cdot ME$ или $OM : DM = EM : AM$.

Тогда треугольники DMO и AME подобны, так как имеют равные вертикальные углы с вершиной M и пропорциональные стороны при этой вершине. Значит, равны их углы MAE и MDO, поэтому отрезок OE виден из точек A и D под равными углами, и четырехугольник $ADOE$ вписанный (рис 2).



Так как $OE = OD$, то равны углы DAO и EAO. Тогда точки E и F симметричны относительно биссектрисы угла BAC, так как при такой симметрии данная окружность переходит в себя, а луч AF — в луч AE. Точки B и C так же симметричны относительно прямой AO. Тогда отрезки EF и BC перпендикулярны прямой AO и поэтому параллельны друг другу.

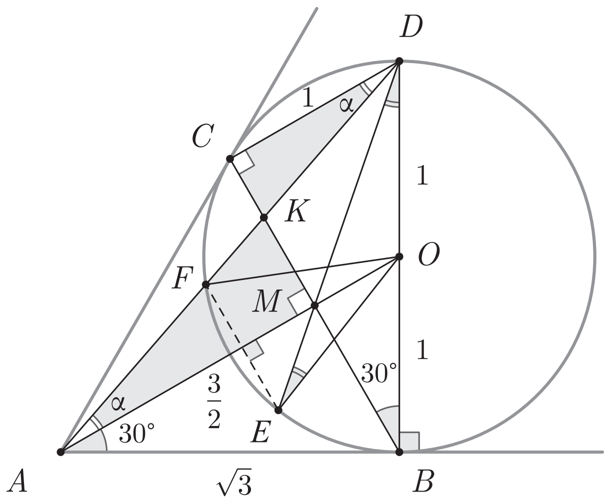
б) Пусть данная окружность имеет радиус 1 и вписана в угол с величиной $60°$. Угол BCD равен $90°$, поскольку он опирается на ее диаметр, а угол CBD равен $30°$. Тогда $CD = 1$, $OM = 0{,}5$ и $AM = 1{,}5$.

Из треугольника MAB по теореме Пифагора найдем $AB = \sqrt{3}$, а из треугольника ADB найдем $AD = \sqrt{7}$.

Так как $CD \parallel AM$, треугольники CKD и MAK подобны, поэтому $AK : DK = 3 : 2$. Значит, $AK = \frac{3\sqrt{7}}{5}$.

Обозначим KAM за α. Тогда $\cos\alpha = \frac{5}{2\sqrt{7}}$. Откуда $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{14}$.

По теореме о квадрате касательной $AF \cdot AD = AB^2 = 3$. Откуда $AF = \frac{3}{\sqrt{7}}$. Треугольник AFE равнобедренный, поэтому $EF = 2AF\sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{7}$. Тогда $EF : BC = 3 : 7$.



Критерии

- 7 б. Проведено верное доказательство и обоснованно получен верный ответ.
- 4 б. Проведено верное доказательство пункта а), но верный ответ в пункте б) не получен.
- 5 б. Проведено верное доказательство пункта а), но ответ в пункте б) неверный из-за арифметической ошибки.

- 1 б. В доказательстве необоснованно использованы соображения симметрии.
- 3 б. Получен верный ответ в пункте б) при отсутствии доказательства в пункте а).

Задача 10.5. На координатной плоскости в некоторых точках с целыми координатами лежит по камешку (камешков конечное количество). Разрешается делать следующий *ход*: выбрать пару камешков, взять некоторый вектор $\vec{a}$ с целыми координатами, и далее один из выбранных камешков сдвинуть на вектор $\vec{a}$, а другой — на противоположный вектор $-\vec{a}$. При этом запрещается класть два камушка в одну точку. Всегда ли можно за несколько ходов добиться того, чтобы все камешки лежали на одной прямой?

Ответ: Да, всегда.

Решение. Пусть (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) — начальные координаты камешков, и пусть
$(x_0, y_0) = \left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, \frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}\right)$ — координаты их центра масс. Рассмотрим прямую ℓ, проходящую через точку (x_0, y_0), на которой лежит бесконечное количество узлов (т.е. точек с целыми координатами). Такая прямая ℓ найдется. Действительно, если $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, то годится прямая $y_0 x = x_0 y$ — на ней лежат узлы вида (mnx_0, mny_0), где $m \in \mathbb{Z}$; если же $(x_0, y_0) = (0, 0)$, то подойдет прямая $y = 0$.

Сделаем ход с 1-м и n-м камешками так, чтобы 1-й камешек попал в некоторый незанятый узел прямой ℓ. (Отметим, что такой ход можно сделать: если 1-й камешек попал в узел A, то n-й камешек попадет в узел A', симметричный A относительно середины отрезка между положениями 1-го и n-го камней до хода; так как возможностей выбора узла A бесконечно много, то для какого-то из них соответствующий узел A' будет незанятым). Сделаем аналогичные ходы со 2-м и n-м камешками, с 3-м и n-м камешками, и т.д., с $(n-1)$-м и n-м камешками.

Теперь все камни, кроме возможно n-го, лежат на прямой ℓ. Но заметим, что в процессе выполнения ходов центр масс камней (x_0, y_0) остается неизменным, и он лежит на прямой ℓ (согласно нашему выбору ℓ). Но отсюда следует, что и оставшийся n-й камень также лежит на ℓ.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 1 б. Сказано, что центр масс системы камешков не меняется при операциях.
- 2 б. (поглощает оба предыдущих критерия).Сказано, что центр масс имеет рациональные координаты.
- 4 б. (поглощает оба предыдущих критерия). Доказано, что существует прямая через центр масс, содержащая бесконечное количество узлов сетки.
- 0 б. Только ответ.