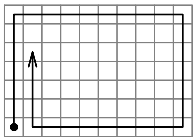
Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2021. Заключительный этап. 9 класс.

Задача 1. Дана клетчатая таблица шириной 300 и высотой 50 клеток. Пластмассовую улитку ставят в левый нижний угол так, чтобы она смотрела по таблице вверх, и начинают передвигать по одной клетке в направлении взгляда. Если следующей клетки нет, то есть улитка стоит у края доски, либо если в следующей клетке она уже побывала, то её поворачивают направо и продолжают двигать по прямой в направлении взгляда. (Получается, что улитка двигается по спирали по часовой стрелке.)

Улитка останавливается, когда пройдены все клетки. Укажите номер строки и номер столбца клетки, в которой она остановится. Столбцы пронумерованы слева направо числами от 1 до 300, а строки — снизу вверх числами от 1 до 50.



Решение. Ответ: 25 строка, 26 столбец.

Будем обозначать клетку (x, y), если она находится в строке x и столбце y.

Сначала улитка стоит в клетке $(1, 1)$. Через несколько ходов она полностью обойдёт всю каёмку и попадёт в клетку $(2, 2)$. Заметим, что в этот момент конфигурация задачи повторится: улитка стоит в левой нижней клетке и её следующий ход будет вверх, только прямоугольник стал иметь ширину 298 и высоту 48. Ещё через несколько ходов улитка окажется в клетке $(3, 3)$, и конфигурация опять повторится для прямоугольника 296×46, далее она когда-то будет в клетке $(4, 4)$ и т. д.

В тот момент, когда улитка окажется в клетке $(25, 25)$, она будет в левом нижнем углу прямоугольника шириной 252 клетки и высотой 2 клетки. Тогда понятно, что дальше фишка пройдёт по контуру данного прямоугольника и остановится в клетке $(25, 26)$.

□

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

3 б. Присутствует идея о том, что улитка после каждого пройденного цикла оказывается в клетке (n, n), где $n = 1, 2, 3...25$

1 б. Есть верный ответ.

Задача 2. Числа d и e — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Могло ли так получиться, что a, b, c, d, e — это подряд идущие целые числа в некотором порядке?

Решение. Ответ: Да.

Такое получиться могло, например, для трёхчлена $2x^2 - 2$ и его корней 1 и -1. Числа $-2, -1, 0, 1, 2$ как раз являются подряд идущими целыми числами. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Выписан любой пример, удовлетворяющий условию задачи.

Задача 3. В пятизначном числе каждую цифру увеличили на 2 или на 4 (разные цифры могли быть увеличены на разные числа), в результате чего оно увеличилось в четыре раза. Каким могло быть исходное число? Найдите все возможные варианты и докажите, что нет других.

Решение. Ответ: 14074.

Обозначим исходное пятизначное число через N, тогда получившееся число стало равно $4N$. Их разность равна $3N$ и является пятизначным числом, состоящим из 2 и 4. Также эта разность $3N$ не меньше $3 \cdot 10000$, поэтому она начинается с четвёрки.

По признаку делимости на 3 сумма цифр числа $3N$ делится на 3, поэтому оно не может состоять из двух четвёрок и трёх двоек, трёх четвёрок и двух двоек, пяти четвёрок. Следовательно, число $3N$ состоит либо из одной четвёрки и четырёх двоек, либо из четырёх четвёрок и одной двойки. Тогда число N может являться каким-то из чисел $\frac{42222}{3} = 14074$, $\frac{44442}{3} = 14814$, $\frac{44424}{3} = 14808$, $\frac{44244}{3} = 14748$, $\frac{42444}{3} = 14148$.

Ясно также, что число N не могло в своей десятичной записи содержать восьмёрку, поэтому осталось лишь проверить число 14074. И оно подходит: $14074 \cdot 4 = 56296$, все цифры учетверённого числа больше соответствующих исходных на 2 или 4. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

6 б. В целом верное решение, но допущена арифметическая ошибка, не влияющая на его ход.

5 б. Обоснованно получены числа: 14074, 14814, 14808, 14748, 14148.

4 б. Доказано, что к числу прибавляются либо одна четвёрка и четыре двойки, либо четыре четвёрки и одна двойка.

1 б. Есть только ответ.

Задача 4. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка M такая, что $AM = AB + MC$. Докажите, что перпендикуляр к AC, проходящий через M, делит дугу BC описанной окружности ABC пополам.

Решение. Отметим на отрезке AM точку X такую, что $XM = MC$. Тогда из условия задачи следует, что $AX = AB$.

Рассмотрим центр описанной окружности треугольника BCX — он находится на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам BC и BX. Серединный перпендикуляр к отрезку BC делит дугу BC пополам; а серединный перпендикуляр к XB является высотой и медианой равнобедренного треугольника XAB, поэтому является биссектрисой угла BAC и делит дугу BC пополам.

Следовательно, середина дуги BC является центром описанной окружности треугольника BCX, т. е. серединный перпендикуляр к отрезку XC проходит через середину дуги BC, что и требовалось доказать. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

2 б. Отмечена точка X, но дальнейших продвижений нет.

Задача 5. На доске выписаны числа от 1 до 2021. Денис хочет выбрать среди них 1010 так, чтобы сумма любых двух не равнялась 2021 или 2022. Сколько существует способов это сделать?

Решение. Ответ: $\frac{1011 \cdot 1012}{2} = 511566$.

Запишем наши числа в следующем порядке: $2021, 1, 2020, 2, 2019, 3, \ldots, 1012, 1010, 1011$. Заметим, что если два числа дают в сумме 2021 или 2022, то они стоят в этой последовательности рядом. Наша задача свелась к следующей: в ряд стоит 2021 объект (в дальнейшем для удобства будем считать, что это 2021 шарик), и нам нужно посчитать количество способов выбрать из них 1010, среди которых нет соседних.

Покрасим невыбранные шарики в красный цвет, а выбранные — в синий. Положим все 1011 красных шариков подряд. Требуется выложить в промежутки между ними (или с краю) 1010 синих шариков так, чтобы среди них не было соседних. Таких промежутков ровно 1012: промежутков между двумя красными ровно 1010, а также 2 промежутка с краю; в каждый из этих промежутков надо поместить не более одного синего шарика. Следовательно, нужно посчитать количество способов выбрать 1010 промежутков из 1012 имеющихся. Как известно, данная величина равна $C_{1012}^{1010} = C_{1012}^{2} = \frac{1012\cdot1011}{2} = 511566$.

Другое решение.

Числа от 1 до 2021 разобьём на 1011 групп — 1010 непересекающихся групп пар чисел, дающих в сумме 2022 (а именно: $(1, 2021)$, $(2, 2020)$, $\ldots$, $(1009, 1013)$, $(1010, 1012)$) и группа из одного оставшегося числа 1011.

В каждой из групп по условию можно выбрать не более одного числа. Следовательно, чтобы выбрать 1010 чисел, надо выбрать группу, из которой числа не будут взяты, а из всех остальных групп нужно выбрать ровно по одному числу.

Пусть мы не взяли ни одного числа из группы $(a, 2022-a)$ (здесь и далее будем считать, что в такой записи $a \leqslant 2022-a$). Из всех остальных групп нужно выбрать ровно по одному числу, в частности, нужно взять 1011 (если $a = 1011$, то этот шаг пропускаем). Тогда нельзя выбрать 1010 (иначе $1011+1010 = 2021$), но тогда надо выбрать 1012 (иначе из последней пары ничего не выбрано). Тогда нельзя выбрать 1009 (иначе $1012 + 1009 = 2021$), но тогда надо выбрать 1013 (иначе из предпоследней пары ничего не выбрано). Продолжая так и далее, мы получаем, что из пары $(a+1, 2022-(a+1))$ мы берём число $2022-(a+1)$. Итак, во всех парах, где наименьшее число больше a, выбранные числа определяются однозначно (точнее, должны быть выбраны наибольшие числа в этих парах).

Рассмотрим теперь все пары, в которых наименьшее число меньше a. Рассмотрим среди них пару $(b, 2022-b)$ такую, в которой выбрано наибольшее число, т. е. $2022-b$ (случай, когда таких пар нет, рассмотрим отдельно), и если таких пар несколько, рассмотрим ту, в которой b максимально. Из всех пар от $(b+1, 2022-(b+1))$ до $(a-1, 2022-(a-1))$ всегда выбиралось наименьшее число (в силу максимальности b). В паре $(b-1, 2022-(b-1))$ было выбрано число $2022-(b-1)$ (иначе $(b-1)+(2022-b) = 2021$). Аналогично в паре $(b-2, 2022-(b-2))$ было выбрано число $2022-(b-2)$ и т. д., в паре $(1, 2021)$ выбрано число 2021.

Теперь поймём, как определяется набор чисел, удовлетворяющий условию. Во-первых, выбирается группа $(a, 2022-a)$ (т. е. число $1 \leqslant a \leqslant 1011$), в которой не выбрано ни одно число. Далее во всех группах, где наименьшее число больше a, выбор определяется однозначно (из группы берём наибольшее число). Во-вторых, выбирается пара $(b, 2022-b)$ (т. е. число $1 \leqslant b \leqslant a-1$), и во всех остальных парах выбор определяется однозначно (в парах с наименьшим числом от $b+1$ до $a-1$ выбирается наименьшее число, а в парах, где оно меньше b, выбирается наибольшее).

Осталось посчитать количество вариантов. Фиксируем некоторое a, тогда вариантов выбрать b будет ровно $a-1$, да ещё один вариант, когда во всех парах с наименьшим числом меньше a выбиралось наименьшее число (т. е. числа b просто не существует). Всего a вариантов для числа b. Суммируя по всем $a \leqslant 1011$, получаем $1+2+3+\ldots+1010+1011 = \frac{1011 \cdot 1012}{2} = 511566$ вариантов для нашего набора. Очевидно, что все эти варианты различны и удовлетворяют условию (набор однозначно задаётся выбранными числами a и b).

$\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

7 б. Любое полное решение задачи, но ответ дан в виде формулы или выражения (например, $\frac{1011 \cdot 1012}{2}$ или C^2_{1012}).

6 б. Любое полное решение задачи, но ответ дан в виде формулы с многоточием (например, $1+2+3+\ldots+1010+1011$).

2 б. Присутствует разбиение чисел на пары, но дальнейших продвижений нет.

1 б. Есть верный ответ.