Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2021. Заключительный этап. 8 класс.

Задача 1. Назовём число *маленьким*, если оно 10-значное и не существует меньшего 10-значного числа с такой же суммой цифр. Сколько существует маленьких чисел?

Решение. Ответ: 90.

Ясно, что сумма цифр 10-значного числа может принимать одно из значений от 1 до 90 включительно. Для каждой из 90 возможных сумм цифр существует единственное наименьшее 10-значное с такой суммой цифр. Следовательно, маленьких чисел 90. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

1 б. Есть только верный ответ.

Задача 2. Про вещественные числа a, b, c, x, y известно, что

$$\frac{1}{a+x} = 6, \quad \frac{1}{b+y} = 3, \quad \frac{1}{c+x+y} = 2.$$

Докажите, что среди чисел a, b, c одно равно сумме двух других.

Решение. Из равенств в условии следует, что $a+x = \frac{1}{6}$, $b+y = \frac{1}{3}$, $c+x+y = \frac{1}{2}$. Следовательно, $c+x+y = \frac{1}{2} = \frac{1}{6}+\frac{1}{3} = (a+x)+(b+y)$. Тогда $c+x+y = a+x+b+y$, откуда получаем $c = a+b$, что и требовалось. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

1 б. Получено выражение $a = \dfrac{1}{6} - x$.

1 б. Получено выражение $b = \dfrac{1}{3} - y$.

1 б. Получено выражение $c = \dfrac{1}{2} - x - y$.

Задача 3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбрана точка D так, что $AB + BD = DC$. Докажите, что $\angle ADC = 90°$, если известно, что $\angle B = 2\angle C$.

Решение. Отметим точку M на продолжении стороны BC за точку B так, что $AB = BM$. В равнобедренном треугольнике ABM внешний угол при вершине B равен сумме двух равных углов при основании AM, поэтому $\angle AMB = \frac{\angle B}{2} = \angle C$. Следовательно, треугольник AMC является равнобедренным и $AM = AC$. Поскольку $MD = MB + BD = AB + BD = DC$, отрезок AD является медианой этого равнобедренного треугольника, но тогда он является и его высотой, т. е. $\angle ADC = 90^\circ$.

Замечание. Аналогичное решение получается, если отметить на отрезке DC точку N такую, что $BD = DN$. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

2 б. Построена либо точка M, либо точка N, но дальнейших продвижений нет.

Задача 4. На доске написано N натуральных чисел, где $N \geqslant 5$. Известно, что сумма всех чисел равна 80, а сумма любых пяти из них не больше 19. Какое наименьшее значение может принимать N?

Решение. Ответ: 26.

Условие задачи равносильно тому, что сумма пяти наибольших чисел не превосходит 19, а сумма всех чисел равна 80. Заметим, что среди пяти наибольших чисел обязательно есть число, не большее 3 (иначе, если все они не меньше 4, их сумма не меньше $4 \cdot 5 = 20$, а должна быть не больше 19).

Обозначим количество всех чисел за x. Раз среди пяти наибольших есть число, не большее 3, то и все остальные $x - 5$ чисел не больше 3. Следовательно, сумма всех чисел не превосходит $3(x-5)+19$, а с другой стороны, она равна 80. Итого мы получаем неравенство $3(x-5)+19 \geqslant 80$. Решая это неравенство и учитывая, что x является целым числом, получаем, что $x \geqslant 26$.

Осталось привести пример таких 26 чисел. Возьмём 24 тройки и 2 четвёрки, тогда общая сумма равна $24 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 80$, а сумма любых пяти не больше $3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 17 \leqslant 19$. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

3 б. Явно приведены 26 чисел, удовлетворяющих условию задачи.

Задача 5. На доске выписаны числа от 1 до 2021. Денис хочет выбрать среди них 1010 так, чтобы сумма любых двух не равнялась 2021 или 2022. Сколько существует способов это сделать?

Решение. Ответ: $\frac{1011\cdot1012}{2} = 511566$.

Запишем наши числа в следующем порядке: $2021, 1, 2020, 2, 2019, 3, \ldots, 1012, 1010, 1011$. Заметим, что если два числа дают в сумме 2021 или 2022, то они стоят в этой последовательности рядом. Наша задача свелась к следующей: в ряд стоит 2021 объект (в дальнейшем для удобства будем считать, что это 2021 шарик), и нам нужно посчитать количество способов выбрать из них 1010, среди которых нет соседних.

Покрасим невыбранные шарики в красный цвет, а выбранные — в синий. Положим все 1011 красных шариков подряд. Требуется выложить в промежутки между ними (или с краю) 1010 синих шариков так, чтобы среди них не было соседних. Таких промежутков ровно 1012: промежутков между двумя красными ровно 1010, а также 2 промежутка с краю; в каждый из этих промежутков надо поместить не более одного синего шарика. Следовательно, нужно посчитать количество способов выбрать 1010 промежутков из 1012 имеющихся. Как известно, данная величина равна $C_{1012}^{1010} = C_{1012}^{2} = \frac{1012\cdot1011}{2} = 511566$.

Другое решение.

Числа от 1 до 2021 разобьём на 1011 групп — 1010 непересекающихся групп пар чисел, дающих в сумме 2022 (а именно: $(1, 2021)$, $(2, 2020)$, $\ldots$, $(1009, 1013)$, $(1010, 1012)$) и группа из одного оставшегося числа 1011.

В каждой из групп по условию можно выбрать не более одного числа. Следовательно, чтобы выбрать 1010 чисел, надо выбрать группу, из которой числа не будут взяты, а из всех остальных групп нужно выбрать ровно по одному числу.

Пусть мы не взяли ни одного числа из группы $(a, 2022-a)$ (здесь и далее будем считать, что в такой записи $a \leqslant 2022-a$). Из всех остальных групп нужно выбрать ровно по одному числу, в частности, нужно взять 1011 (если $a = 1011$, то этот шаг пропускаем). Тогда нельзя выбрать 1010 (иначе $1011+1010 = 2021$), но тогда надо выбрать 1012 (иначе из последней пары ничего не выбрано). Тогда нельзя выбрать 1009 (иначе $1012 + 1009 = 2021$), но тогда надо выбрать 1013 (иначе из предпоследней пары ничего не выбрано). Продолжая так и далее, мы получаем, что из пары $(a+1, 2022-(a+1))$ мы берём число $2022-(a+1)$. Итак, во всех парах, где наименьшее число больше a, выбранные числа определяются однозначно (точнее, должны быть выбраны наибольшие числа в этих парах).

Рассмотрим теперь все пары, в которых наименьшее число меньше a. Рассмотрим среди них пару $(b, 2022-b)$ такую, в которой выбрано наибольшее число, т. е. $2022-b$ (случай, когда таких пар нет, рассмотрим отдельно), и если таких пар несколько, рассмотрим ту, в которой b максимально. Из всех пар от $(b+1, 2022-(b+1))$ до $(a-1, 2022-(a-1))$ всегда выбиралось наименьшее число (в силу максимальности b). В паре $(b-1, 2022-(b-1))$ было выбрано число $2022-(b-1)$ (иначе $(b-1)+(2022-b) = 2021$). Аналогично в паре

$(b-2, 2022-(b-2))$ было выбрано число $2022-(b-2)$ и т. д., в паре $(1, 2021)$ выбрано число 2021.

Теперь поймём, как определяется набор чисел, удовлетворяющий условию. Во-первых, выбирается группа $(a, 2022-a)$ (т. е. число $1 \leqslant a \leqslant 1011$), в которой не выбрано ни одно число. Далее во всех группах, где наименьшее число больше a, выбор определяется однозначно (из группы берём наибольшее число). Во-вторых, выбирается пара $(b, 2022-b)$ (т. е. число $1 \leqslant b \leqslant a-1$), и во всех остальных парах выбор определяется однозначно (в парах с наименьшим числом от $b+1$ до $a-1$ выбирается наименьшее число, а в парах, где оно меньше b, выбирается наибольшее).

Осталось посчитать количество вариантов. Фиксируем некоторое a, тогда вариантов выбрать b будет ровно $a-1$, да ещё один вариант, когда во всех парах с наименьшим числом меньше a выбиралось наименьшее число (т. е. числа b просто не существует). Всего a вариантов для числа b. Суммируя по всем $a \leqslant 1011$, получаем $1+2+3+\ldots+1010+1011 = \frac{1011 \cdot 1012}{2} = 511566$ вариантов для нашего набора. Очевидно, что все эти варианты различны и удовлетворяют условию (набор однозначно задаётся выбранными числами a и b).

$\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

7 б. Любое полное решение задачи, но ответ дан в виде формулы или выражения (например, $\frac{1011 \cdot 1012}{2}$ или C_{1012}^2).

6 б. Любое полное решение задачи, но ответ дан в виде формулы с многоточием (например, $1+2+3+\ldots+1010+1011$).

2 б. Присутствует разбиение чисел на пары, но дальнейших продвижений нет.

1 б. Есть верный ответ.