Заключительный этап. 9 класс

Задача 1. Пассажирский поезд движется по дугообразному участку железной дороги, равномерно замедляя скорость. Длина участка равна S, а время, необходимое поезду, чтобы проехать по нему, равно t. После прохождения участка направление поезда изменилось на угол φ, в начале участка скорость поезда была в α раз больше, чем в конце участка. Найдите связь между массой пассажира m, сидящего в поезде, и весом пассажира P в момент, когда поезд находится в середине участка. Найдите массу пассажира, если $P = 840$ Н, $S = 1{,}5$ км, $t = 60$ с, $\alpha = 1{,}5$, $\varphi = 60°$ и $g = 9{,}8$ м/с^2.

Возможное решение

На пассажира действуют три перпендикулярных друг другу ускорения: ускорение свободного падения, центростремительное ускорение и тангенциальное ускорение. Сначала найдем ускорение по направлению движения поезда. Пусть начальная скорость поезда равна v_0, а конечная скорость v_1, тогда $v_0 = \alpha v_1$. Поскольку скорость изменяется линейно, средняя скорость выражается как частное от общей длины пути и времени, а также как среднее значение начальной и конечной скорости:

$$\frac{v_0 + v_1}{2} = \frac{(\alpha+1)v_0}{2} = \frac{s}{t} \Rightarrow v_1 = \frac{2s}{(\alpha+1)t}.$$

Тогда модуль тангенциального укорения равен:

$$a_\tau = \left|\frac{v_1 - v_0}{t}\right| = \frac{(\alpha-1)v_1}{t} = \frac{2s(\alpha-1)}{t^2(\alpha+1)}.$$

Теперь изучим центростремительное ускорение. Для этого нам нужно найти радиус траектории, который в случае движения по кругу равен:

$$r = s/\varphi.$$

Далее находим скорость v_2 в центре траектории. Для этого воспользуемся общей формулой, записанной для двух одинаковых участков пути - от начала дугового участка до его середины и от середины до его конца:

$$\frac{s}{2} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} = \frac{v_0^2 - v_2^2}{2a}.$$

Отсюда можно получить выражение для скорости v_2:

$$v_2 = \sqrt{\frac{\alpha^2+1}{2}}v_1 = \sqrt{\frac{\alpha^2+1}{2}}\frac{2s}{(\alpha+1)t}.$$

Отсюда центростремительное ускорение равно:

$$a_n = \frac{v_2^2}{r} = v_2^2\frac{\varphi}{s} = \frac{2s\varphi}{t^2}\frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2}.$$

Третье ускорение в системе - это ускорение свободного падения. Поскольку все ускорения перпендикулярны, мы должны сложить каждое ускорение в квадрате и извлечь квадратный корень из суммы для нахождения результирующего ускорения a:

$$a = \sqrt{g^2 + a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{g^2 + \left(\frac{2s(\alpha-1)}{t^2(\alpha+1)}\right)^2 + \left(\frac{2s\varphi}{t^2}\frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2}\right)^2}.$$

Данное ускорение и является связующим звеном между весом пассажира и его массой:

$$P = ma \Rightarrow m = \frac{P}{a}.$$

Подставляя данные задачи, получаем массу пассажира $m \approx 85{,}6$ кг.

Критерии

1. Верно найдено тангенциальное ускорение (+ 1 балл).

2. Верно найдено центростремительное ускорение (+ 2 балла).

3. Верно найдена масса пассажира (+ 1 балл).

5. Приведён верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 2. Тонкий стержень длины $a = 1$ м лежит в неподвижной сфере радиуса $R = 2$ м так, что один конец находится в нижней точке сферы P. Сфера гладкая за исключением окрестности точки P много меньшей длины стержня. Найдите минимальный коэффициент трения в окрестности точки P, при котором такое положение стержня возможно.

Возможное решение

Обозначим крайнюю нижнюю точку стержня точкой 1, а верхнюю точку – точкой 2. Напишем условие равновесия стержня. Напишем II закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось:

$$F_{\text{тр}} = N_2 \sin\alpha \quad \longrightarrow \quad \mu N_1 = N_2 \sin\alpha\,,$$

где α – угол между точками 1, точкой центра сферы и точкой 2. Напишем равенство моментов сил относительно центра масс стержня:

$$F_{\text{тр}} l_{\text{тр}} + N_2 l_N = N_1 l_N\,,$$

где плечо силы трения равно

$$l_{\text{тр}} = \frac{a}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\,,$$

а плечо нормальной реакции опоры равно

$$l_N = \frac{a}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,.$$

Тогда:

$$\mu N_1 \frac{a}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = (N_1 - \frac{\mu N_1}{\sin\alpha})\frac{a}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,,$$

$$\mu \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\mu}{\sin\alpha}\,,$$

$$\mu = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\sin\alpha}}\,.$$

Здесь $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$, а $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. Подставим в выражение для μ тригонометрические функции:

$$\mu = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{\frac{a}{R}\sqrt{1 - (\frac{a}{2R})^2}}{\frac{a^2}{2R^2} + 1}$$

Критерии

1. Верно написан второй закон Ньютона (+ 1 балл).
2. Верно написано равенство моментов сил (+ 2 балла).
3. Приведён верный ответ (+ 2 балла).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 3. Кошка совершает прыжок с края стола высоты H, приобретая начальную скорость V_0, направленную под углом α к горизонту, таким что $\sin\alpha = \sqrt{2gH}/V_0$. Длина лап кошки равна l, при этом $l \ll H$. Приземление кошки на пол с коэффициентом трения μ происходит таким образом, что на кошку действует минимально возможная сила реакции опоры. Найдите тормозной путь кошки в двух случаях: а) коэффициент трения $\mu \ll \operatorname{ctg}\alpha$; б) коэффициент трения $\mu \gg \operatorname{ctg}\alpha$.

Возможное решение

Найдем проекции скорости перед приземлением кошки на горизонтальную и вертикальную оси – x и y.

$$v_x = v_0\cos\alpha\,, \quad v_y = \sqrt{{v_0}^2\sin\alpha^2 + 2gH}\,.$$

В процессе приземления кошка проходит путь равный длине лап (это следует из условия минимальности развиваемой лапами силы, также этим условием обеспечивается постоянство силы). Условие, что длина лап кошки много меньше высоты стола, дает право пренебречь работой силы тяжести в процессе приземления:

$$(N - mg)l = \frac{m{v_y}^2}{2} \quad \longrightarrow \quad N \approx \frac{2mgH}{l}\,.$$

Далее нам понадобится узнать, как связаны времена приземления и торможения кошки. Это будет определять, останавливалась ли кошка исключительно в процессе приземления или часть процесса торможения (возможно, почти все торможение) происходила уже после того, как приземление закончилось. Для этого оценим время приземления, полагая для простоты, что средняя скорость равна среднему арифметическому начальной скорости и конечной скорости v_1 (это упрощение не будет влиять на порядок величины)

$$t \approx \frac{2l}{v_y} = \frac{l}{\sqrt{gh}}\,.$$

Из закона изменения импульса найдем, как изменится горизонтальная скорость за время приземления:

$$F_{\text{тр}}t = mv_0\cos\alpha - mv_1 = m(v_0\cos\alpha - v_1) = m\Delta v\,,$$

$$\Delta v \approx \mu\frac{2gH}{l}\frac{l}{\sqrt{gH}} = 2\mu\sqrt{gH}\,.$$

В итоге для изменения горизонтальной скорости имеем оценку для двух случаев: случай а – торможение после приземления, случай б – во время приземления.

$$\text{а) } \Delta v \ll v_0\cos\alpha\,;$$

$$\text{б) } \Delta v \gg v_0\cos\alpha\,.$$

Тогда из ЗСЭ получаем тормозной путь $L_{\text{т}}$ в двух случаях:

$$\text{а) } L_{\text{т}}\mu mg = \frac{mv_0^2\cos\alpha^2}{2}\,,$$

$$L_{\text{т}} = \frac{v_0^2\cos\alpha^2}{2\mu g}\,.$$

$$\text{б) } L_{\text{т}}\mu N = \frac{mv_0^2\cos\alpha^2}{2} \quad \longrightarrow \quad L_{\text{т}}\frac{\mu 2mgH}{l} = \frac{mv_0^2\cos\alpha^2}{2}\,,$$

$$L_{\text{т}} = \frac{v_0^2\cos\alpha^2}{4\mu gH}\,.$$

Критерии

1. Верно найдена скорость кошки в момент падения (+ 1 балл).
2. Верно написана оценка на нормальную реакцию опоры (+ 1 балл).
3. Верно написана оценка на изменение горизонтальной скорости (+ 2 балла).
4. Найден тормозной путь для обоих случаев (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 4. Цилиндрический бачок высоты H содержит слой льда толщины $h = 4/5H$ при температуре $0°C$. В бачок наливают до полного заполнения объема цилиндра воду с температурой $50\ °C$, потом долго ждут, затем всю воду выливают. Какое минимальное число раз нужно повторить эту операцию, чтобы растопить весь лед. Считать, что теплообмена с окружающей средой нет. Теплоемкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг $\cdot° C$), плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Возможное решение

Для n-го раза наливания воды (толщина слоя h_n) напишем уравнение теплового баланса.

$$c_{\text{ в}} T_1 \rho_{\text{ в}} h_n S = \lambda \Delta h_n S \rho_{\text{ л}} ,$$

$$\Delta h_n = \frac{c_{\text{ в}} T_1 \rho_{\text{ в}} h_n}{\rho_{\text{ л}}} = k h_n ,$$

где k постоянная величина. Учтем, что установившаяся температура равна 0 градусов, при этом часть льда (толщины Δh_n) превратилась в воду, которую перед повторением операции с номером n+1 сольют. Площадь сечения сосуда S из уравнения сокращается. Заметим, что последовательность h_n образует геометрическую прогрессию

$$h_1 = H - h\,, \quad \Delta h_1 = k h_1\,; \quad h_2 = h_1 + k h_1\,, \quad \Delta h_2 = h_1(1+k)k\,; \quad \ldots \quad h_n = h_1(1+k)^{n-1}.$$

Формальным условием того, что весь лёд растаял, является толщина слоя воды большая, чем высота сосуда

$$h_{n+1} \geq H\,,$$

$$(H-h)(1+k)^n \geq \quad \longrightarrow \quad (1+k)^n \geq \frac{H}{H-h}\,.$$

В полученном неравенстве левая часть — растущая функция n, поэтому нужное наименьшее значение можно найти подбором. Отсюда нужно совершить операцию $n = 4$ раз.

Критерии

1. Верно написано уравнение теплового баланса (+ 1 балл).
2. Верно написана геометрическая прогрессия для толщины слоя льда (+ 2 балла).
3. Приведён верный ответ (+ 2 балла).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 5. У экспериментатора Глюка в наборе имеется батарейка с внутренним сопротивлением 1 Ом, при коротком замыкании через нее проходит ток 1 А. Также имеется четыре внешних разных резистора с сопротивлениями: 1,5 Ом, 2 Ом, 3 Ом, 6 Ом. Какой набор резисторов нужно составить и как нужно собрать электрическую схему из имеющихся элементов для выделения максимальной тепловой мощности на внешних резисторах? Чему равна эта мощность?

Возможное решение

Сначала поймем, к чему должно стремиться внешнее сопротивление R при подключении к батарейке с внутренним сопротивлением r, чтобы достичь выделения максимальной тепловой мощности в общем случае. Напишем закон Ома:

$$U = Ir + IR\,.$$

Тогда максимальная тепловая мощность на внешнем резисторе равна:

$$P = I^2R = \frac{U^2R}{(r+R)^2} = \frac{U^2}{\frac{r^2}{R} + 2r + R} = \frac{U^2}{f(R)}$$

Мощность P будет максимальна, когда функция $f(R)$ будет минимальна. Функция $f(R)$ является суммой гиперболической функции, линейной функции и константы. Такая функция имеет единственный минимум при $R > 0$. Предположим, что это минимум $R = r$. Докажем это. Предположим, мы увеличим минимум функции $f(R)$ на малую величину Δ, тогда:

$$P(r) - P(r+\Delta) = \frac{U^2r}{4r^2} - \frac{U^2(r+\Delta)}{(2r+\Delta)^2} = \frac{U^2r\Delta^2}{4r^2(2r+\Delta)^2} > 0$$

Значит, действительно, мощность максимальна при $R = r$. Из имеющихся в наборе резисторов нужно составить общее внешнее сопротивление максимально близкое. В нашем случае нужно выбрать резисторы с сопротивлениями, например: 2 Ом, 3 Ом, 6 Ом или 1,5 Ом и 3 Ом и подключить их параллельно, тогда внешнее сопротивление будет равняться внутреннему сопротивлению батарейки, равному 1 Ом. А максимальная тепловая мощность на внешнем сопротивлении в таком случае равна

$$P_{max} = \frac{U^2r}{(2r)^2} = \frac{I_0^2r}{4} = 0{,}25\ \text{Вт}\,.$$

Критерии

1. Получено, что максимальная мощность выделяется при равенстве сопротивлений, внутреннего и внешнего (+ 3 балла).
2. Найден верный набор резисторов (+ 1 балл).
3. Найдена максимальная мощность (+ 1 балла).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.