Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2021

Заключительный этап. 8 класс

Задача 1. Металлический брусок массой $m = 10$ г и плотностью $\rho = 8900$ кг/м^3 целиком вморожен в небольшой монолитный кусок льда без полостей массой $M = 130$ г. Температура льда и бруска одинакова и равна $0°C$. Лёд помещают в небольшое ведро, заполненное водой до объёма $V = 0{,}4$ л с начальной температурой T. Какой должна быть температура воды T, чтобы после достижения теплового равновесия кусок льда с металлическим бруском опустился на дно ведра. Теплообменом ведра с окружающей средой пренебречь. Теплота плавления льда $\lambda = 330$ КДж/кг, удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг $\cdot$ $°C$), плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, плотность льда составляет $\rho_1 = 900$ кг/м^3.

Возможное решение

Кусок льда с бруском начнёт тонуть, если приложенная к нему сила тяжести равна силе Архимеда. Обозначим массу льда, окружающего брусок в момент начала погружения, буквой M_*, а его объем - V_*. В этом случае сила тяжести, приложенная к куску льда, равна

$$F_0 = (M_* + m)g$$

до погружения, а сила Архимеда будет равна

$$F_A = \rho_0(V_b + V_*)g = \rho_0(\frac{m}{\rho} + \frac{M_*}{\rho_1})g.$$

Приравнивая эти выражения, можно найти массу льда, оставшуюся в момент его потопления:

$$M_* = m\frac{\rho_1(\rho - \rho_0)}{\rho(\rho_0 - \rho_1)} \approx 79.9 \text{ г}.$$

Следовательно, масса растаяшего льда равна

$$M_p = M - M_* = 50,1 \text{ г}.$$

Чтобы найти искомую температуру воды, нужно подсчитать затраты на плавление такого количества льда. Она находится из уравнения теплового баланса:

$$c\rho_0 V\Delta T = \lambda M_p \Rightarrow \Delta T = \frac{\lambda M_p}{c\rho_0 V\Delta T} \approx 9,8°C.$$

Ответ: $9,8°C$

Критерии

1. Верно записан баланс сил, приложенных к погруженному в жидкости телу (+ 1 балл).

2. Верно рассчитана масса льда, которая останется в момент его потопления (+ 1 балл).

3. Верно рассчитана масса растаявшего льда (+ 1 балл).

4. Приведено верное уравнение теплового баланса для системы (+ 1 балл).

5. Приведён верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 2. Три цилиндрических сосуда соединены трубками так, что первый сосуд соединен со вторым, а второй с третьим, на трубках установлены краны, позволяющие перекрывать трубки. В начальный момент времени краны открыты, а уровень жидкости таков, что места прикреплений трубок к сосудам погружены под воду. Сначала перекрыли кран между сосудом 1 и сосудом 2, а затем налили некоторый объем воды в сосуд 2, после чего уровень воды в сосуде 2 поднялся на 1 см. Затем был перекрыт кран между сосудом 2 и сосудом 3, а после этого открыт кран между сосудом 1 и сосудом 2. В сосуд 2 снова налили то же количество воды, что и в первый раз, и уровень воды в сосуде 2 поднялся на 2 см по сравнению с уровнем непосредственно перед вторым наливанием воды. Далее был снова открыт кран между сосудом 2 и сосудом 3, и оказалось, что уровень воды в сосуде 2 поднялся на 1,5 см по сравнению с уровнем до самого первого наливания воды. Найдите отношение диаметра сосуда 3 к диаметру сосуда 1.

Возможное решение

Обозначим $h_1 = 1$см, $h_2 = 2$см, $h_3 = 1,5$см. После первого наливания воды

$$S_2h_1 + S_3h_1 = V$$

Более того, запомним, что уровень в сосудах 2 и 3 поднялся на 1 см. Если мы перекроем кран между 2 и 3, а затем откроем кран между 1 и 2, то уровень воды в сосудах 1 и 2 установится на новом значении, причем

$$h \cdot S_1 + h \cdot S_2 = h_1S_2.$$

Откуда новый уровень

$$h = \frac{S_2h_1}{S_1 + S_2}.$$

Если после этого налить еще воды в сосуд 2, то окажется, что $h_2S_1 + h_2S_2 = V$ Получаем

$$S_2h_1 + S_3h_1 = h_2S_1 + h_2S_2.$$

Поделим на S_2:

$$1 + \frac{S_3}{S_2} = 2\frac{S_1}{S_2} + 2.$$

Теперь рассмотрим, что произойдет после открытия всех кранов:

$$h_3(S_1 + S_2 + S_3) = h_2S_1 + (h_1 + h_2)S_2 + h_1S_3$$

Откуда

$$0,5\frac{S_1}{S_2} - 0,5\frac{S_3}{S_2} + 1,5 = 0,$$

$$\frac{S_1}{S_2} - \frac{S_3}{S_2} + 3 = 0.$$

Решим теперь систему уравнений:

$$\frac{S_3}{S_2} - 2\frac{S_1}{S_2} = 1,$$

$$\frac{S_1}{S_2} - \frac{S_3}{S_2} = -3,$$

$$\frac{S_1}{S_2} + 3 - 2\frac{S_1}{S_2} = 1,$$

$$\frac{S_1}{S_2} = 2.$$

$$\frac{S_3}{S_2} = 5.$$

Тогда ответ

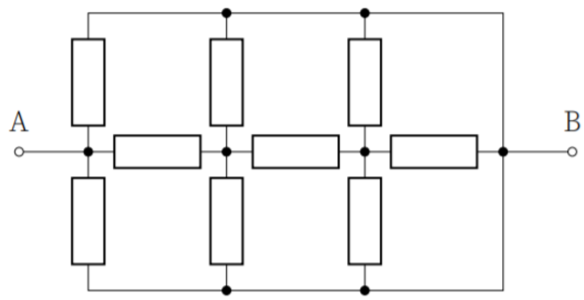
$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{5}{2}.$$

Критерии

1. Получено значение уровня h после первого прибавления воды и открытия крана 1-2 (+ 1 балл).
2. Получено соотношение на площади или отношения площадей из равенства объемов добавленной воды (+ 1 балл).
3. Получено соотношение на площади из данных об открытии всех кранов (+ 1 балл).
4. Приведён верный численный ответ (+ 2 балла).

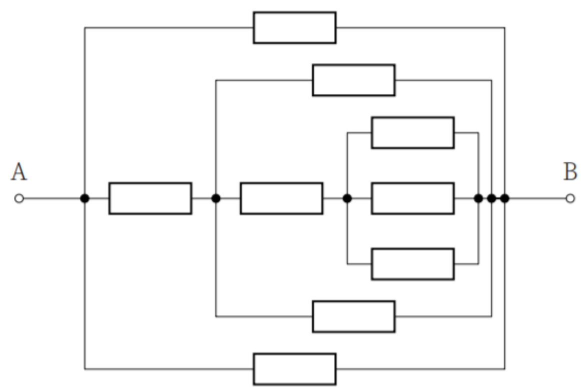
Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 3. Найдите полное сопротивление участка AB электрической цепи, изображенной на рисунке, если сопротивление каждого резистора равно 3 Ом.



Возможное решение

Можно представить данный участок цепи в виде, представленном на рисунке ниже, руководствуясь равенством потенциалов в точках смыкания проводов, симметричных относительно оси, соединяющей точки A и B. После этого можно посчитать общее сопротивление цепи.



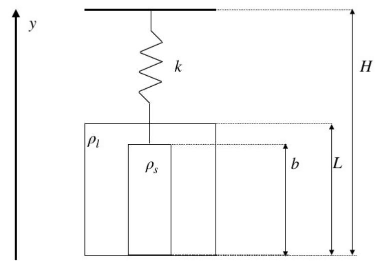
$$R_{AB} = (2R^{-1} + (R + (2R^{-1} + (R + (3R^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1} = \frac{15}{41}R \approx 1,1 \text{ Ом}.$$

Критерии

1. Данная электрическая схема верно сведена к эквивалентной (+ 3 балла).
2. Верно записана формула общего сопротивления участка цепи (+ 1 балл).
3. Приведён верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 4. Брусок имеет форму прямоугольного параллелепипеда высоты $b = 20$ см и квадратным основанием со стороной $a = 5$ см. Плотность материала бруска $\rho_s = 7$ г/см^3. Брусок стоит на дне сосуда, высота уровня жидкости равна $L = 40$ см, плотность жидкости равна $\rho_l = 1$ г/см^3, причем нижняя грань бруска так плотно прилегает ко дну сосуда, что жидкость не проникает между нижней гранью бруска и дном сосуда. Верхняя грань бруска крепится на пружину с коэффициентом жесткости $k = 500$ Н/м, которая в нерастянутом состоянии имеет длину $l = 20$ см. На какой максимальной высоте H относительно дна сосуда можно закрепить верхний конец пружины, чтобы нижняя грань бруска не отрывалась от дна сосуда? Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.



Возможное решение

Поскольку жидкости между дном сосуда и бруском нет, то применять формулу для силы Архимеда нельзя. Вместо этого запишем силу давления на верхнюю грань бруска:

$$F_P = \rho_l g(L - b)a^2.$$

Теперь можно записать условие на неподвижность бруска в виде равенства проекций сил на ось y.

$$0 = \rho_l g(L - b)a^2 + \rho_s a^2 bg - k\Delta x.$$

Откуда возможно найти растяжение пружины:

$$\Delta x = \frac{\rho_l g(L - b)a^2 + \rho_s a^2 bg}{k},$$

$$\Delta x = \frac{1000 \cdot 10 \cdot (0,40 - 0,20) \cdot 0,05^2 + 7000 \cdot 0,05^2 \cdot 0,20 \cdot 10}{500} = 0{,}08 \text{ м}.$$

Высота, на которой можно разместить верхний конец пружины, равна:

$$H = l + \Delta x + b \Rightarrow$$

$$H = 20 + 8 + 20 = 48 \text{ см}.$$

Критерии

1. Правильно записано условие равенства сил вдоль оси y (+ 3 балла).
2. Получена формула для максимальной высоты закрепления пружины (+ 1 балл).
3. Приведён верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 5. В таз с водой погружают ледяной шар, в котором есть замкнутая полость, частично заполненная водой – V_1, а частично – воздухом – V_2. Шар погружен в воду только наполовину. Если поместить в таз с водой такой же шар, но изменить содержимое полости так, что объем V_1, ранее занимаемый водой, теперь занимает воздух, а объем V_2, который прежде был занят воздухом, теперь занимает вода, то шар погрузится в воду на 2/3. Найдите отношение объема полости к объему шара. Плотность воды равна $\rho_в = 1$ г/см^3, плотность льда $\rho_л = 0{,}92$ г/см^3. Силой тяжести, действующей на воздух в полости, пренебречь.

Возможное решение

Приравняем выталкивающую силу к силе тяжести:

$$0,5\rho_w V g = \rho_i V_0 g + \rho_w V_1 g.$$

При этом объем полости $V_p = V_1 + V_2$, где V_2 - объем, занимаемый воздухом в первом случае. Аналогично

$$\frac{2}{3}\rho_w V g = \rho_i V_0 g + \rho_w V_2 g.$$

Поделим оба уравнения на V.

$$0,5\rho_w g = \rho_i \frac{V_0}{V} g + \rho_w \frac{V_1}{V} g,$$

$$\frac{2}{3}\rho_w g = \rho_i \frac{V_0}{V} g + \rho_w \frac{V_2}{V} g.$$

Учтем еще, что

$$V_2 = V - V_0 - V_1.$$

Тогда получим систему:

$$\begin{cases} 0{,}5\rho_w g = \rho_i \frac{V_0}{V} g + \rho_w \frac{V_1}{V} g \\ \frac{2}{3}\rho_w g = \rho_i \frac{V_0}{V} g + \rho_w g - \rho_w \frac{V_1}{V} g - \rho_w \frac{V_0}{V} g \end{cases}$$

Введём переменные $\frac{V_0}{V} = a$, $\frac{V_1}{V} = b$ и преобразуем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,5\rho_w g = \rho_i g a + \rho_w g b \\ -\frac{1}{3}\rho_w g = (\rho_i - \rho_w) g a - \rho_w g b \end{cases}$$

Сложим первое и второе уравнения:

$$\frac{1}{6}\rho_w g = (2\rho_i - \rho_w) g a.$$

Сразу получаем решение:

$$a = \frac{1}{6}\frac{\rho_w}{2\rho_i - \rho_w}.$$

Искомая доля равна

$$1 - a = \frac{12\rho_i - 7\rho_w}{12\rho_i - 6\rho_w} = 0{,}8.$$

Критерии

1. Записано условие равновесия для первого случая (+ 1 балл).

2. Записано условие равновесия для второго случая (+ 1 балл).

3. Приведён верный численный ответ (+ 3 балла).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.