Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2021

Заключительный этап. 7 класс

Задача 1. В высоком цилиндрическом сосуде с площадью дна $S = 120$ см^2 находятся две несмешивающиеся жидкости с плотностями $\rho_1 = 1360$ кг/м^3 и $\rho_2 = 880$ кг/м^3. Внутрь сосуда помещают кубический блок объемом $V = 400$ см^3 и плотностью $\rho_k = 1100$ кг/м^3. Блок полностью находится внутри жидкости и не касается дна сосуда. Насколько изменится высота разделяющей поверхности двух жидкостей после помещения блока внутрь емкости?

Возможное решение

Поскольку плотность блока больше, чем плотность верхней жидкости, и меньше, чем плотность нижней жидкости, блок будет продолжать плавать на разделяющей поверхности между двумя жидкостями. В этом случае на блок действует сила тяжести:

$$F = mg = \rho_k V g.$$

Силы Архимеда обеих жидкостей:

$$F_A = F_{A1} + F_{A2} = \rho_1 g V_x + \rho_2 g(V - V_x).$$

Под V_x понимется объем блока, погруженный в нижнюю жидкость, а под $V - Vx$ - объем блока, находящийся в верхней части жидкости. Сила тяжести и силы Архимеда друг друга уравновешивают, поэтому получаем уравнение

$$\rho_k V g = \rho_1 g V_x + \rho_2 g(V - V_x).$$

Отсюда можно выразить V_x :

$$V_x = V\frac{\rho_k - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Уровень нижней жидкости повышается на объем V_x. Поскольку площадь основания сосуда равна S, то уровень границы раздела жидкостей повышается на Δh, а именно

$$\Delta h = \frac{V_x}{S}.$$

Подставляя V_x, находим искомый объём:

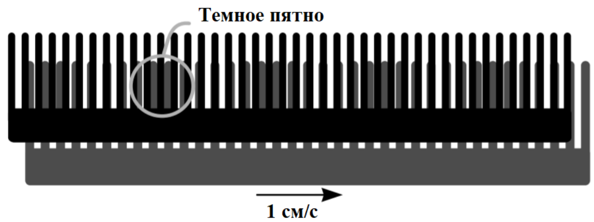
$$\Delta h = \frac{V(\rho_k - \rho_2)}{S(\rho_1 - \rho_2)} = 1,5 \text{ см}.$$

Критерии

1. Верно записаны силы Архимеда, действующие на погруженное тело, обусловленные обеими жидкостями (+ 1 балл).
2. Верно записан баланс сил, приложенных к погруженному в жидкости телу (+ 1 балл).
3. Верно посчитана доля объёма тела (или выражен сам объём), находящегося в одной из двух жидкостей (+ 1 балл).
4. Приведена верная формула для изменения высоты уровня разделения жидкостей (+ 1 балл).
5. Приведён верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 2. Муаровый узор возникает при наложении двух периодических структур с близким периодами так, что повторяющиеся элементы то накладываются друг на друга, то образуют промежутки. Рассмотрим в качестве периодических структур две расчески, изображенные на рисунке. Расчески имеют имеют слегка отличающиеся расстояния между зубцами, нижняя расческа двигается со скоростью $v = 1$ см/с вправо относительно верхней. С какой скоростью и в каком направлении двигаются темные пятна, изображенные на рисунке?



Возможное решение

Зафиксируем положение некоторого тёмного пятна. Если нижняя расческа переместится на один зубец, то новая композиция тёмных пятен будет идентична исходной. Следовательно, выбранное темное пятно переместится на некоторое количество зубцов N относительно предыдущего своего положения. По рисунку можно определить, что на один сдвиг пятен на N зубцов приходится $7N$ зубцов нижней расчески, поэтому темные пятна перемещаются в 7 раз быстрее, чем нижняя расческа: $v = 7$ см/с.

Критерии

1. Присутствует понимание характера движения тёмного пятна (если нижняя расчёска сдвигается на 1 зубец, то система тёмных пятен должна повториться) (+ 2 балла).

2. Посчитано, насколько зубцов "съедет"некоторое фиксированное тёмное пятно в таком случае (+ 2 балла).

3. Приведён верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 3. Локомотив приближается к вокзалу с постоянной скоростью, двигаясь по линейному участку пути. Машинист дает свисток в течение фиксированного промежутка времени $t_0 = 10$ с, но диспетчер вокзала, ожидающий поезд, измеряет время доносящегося до него свиста как $t_1 = 9$ с. Найдите скорость поезда v. Скорость звука в воздухе $c = 340$ м/с.

Возможное решение

Пусть L - расстояние от локомотива до вокзала в момент, когда машинист начинает давать свисток. Время, необходимое звуку, чтобы добраться до диспетчера станции, в данном случае равно

$$\tau_A = L/c.$$

Когда свист прекращается, расстояние от локомотива до диспетчера станции равно $L - vt_0$, где v - скорость поезда. Время, за которое звук распространяется с этого расстояния, равно

$$\tau_B = (L - vt_0)/c.$$

Допустим, машинист начинает давать свисток в момент τ_0 и заканчивает в момент $\tau_0 + t_0$. Диспетчер станции слышит начало свистка в момент $\tau_0 + \tau_A$ и окончание свистка в момент $\tau_0 + t_0 + \tau_B$. Разница этих моментов времени t_1 - это и есть время свистка, измеренное диспетчером. Таким образом, мы получаем уравнение

$$t_1 = t_0 - \tau_A + \tau_B = t_0 - \frac{v}{c}t_0.$$

Отсюда получаем искомую скорость

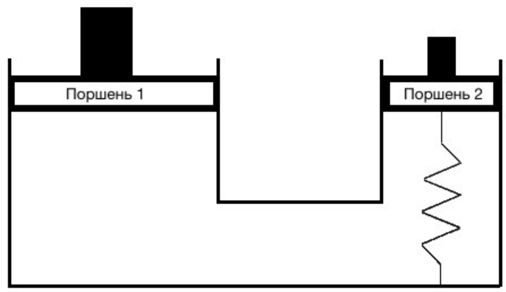
$$v = \frac{t_0 - t_1}{t_0}c = 34 \text{ м/с}.$$

Критерии

1. Верно рассчитано время, необходимое звуку, чтобы добраться до диспетчера станции (+ 1 балл).
2. Верно рассчитано время, за которое звук распространяется от локомотива до диспетчера станции (+ 1 балл).
3. Приведено верное выражение для времени свистка, измеренного диспетчером (+ 1 балл).
4. Приведена верная формула для скорости поезда (+ 1 балл).
5. Приведён верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 4. Два сообщающихся сосуда, заполненных жидкостью, закрыты подвижными невесомыми поршнями, к одному из которых прикреплена невесомая пружина с коэффициентом жесткости $k = 100$ Н/м. В начальный момент времени на поршнях помещены гирьки, причем масса гирьки 1 в четыре раза больше массы гирьки 2. Площадь поршня 1 равна $S_1 = 100$ см^2. Пружина при этом не растянута, а поршни находятся на одном уровне. Плотность жидкости равна $\rho = 0{,}5$ г/см^3. На рисунке изображено начальное состояние системы. Затем на поршень 1 дополнительно ставят гирьку массы $m = 500$ г. Найдите возникающее при этом удлинение пружины. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.



Возможное решение

Из равновесия в начальный момент времени можно заключить, что площадь первого поршня в четыре раза больше, чем площадь второго поршня. Когда на первый поршень дополнительно ставят гирьку массы m, первый поршень опустится вниз на Δx_1, а второй поршень поднимется на Δx_2, причем эти величины связаны через сохранение объема воды в сосуде:

$$S_1 \Delta x_1 = S_2 \Delta x_2.$$

откуда следует

$$\Delta x_2 = 4\Delta x_1$$

Более того, пружина также растянется на Δx_2. Из условия равенства давлений в жидкости на одной и той же высоте относительно дна сосуда получаем:

$$\frac{mg}{S_1} = \rho g(\Delta x_1 + \Delta x_2) + \frac{k\Delta x_2}{S_2}$$

Отсюда следует

$$mg = 5\rho g \Delta x_1 S_1 + \frac{S_1^2}{S_2^2} k \Delta x_1,$$

$$\Delta x_1 = \frac{mg}{5\rho g S_1 + \frac{S_1^2}{S_2^2} k},$$

$$\Delta x_1 = \frac{0,5 \cdot 10}{5 \cdot 500 \cdot 10 \cdot 0,01 + 16 \cdot 100} \approx 2,7\text{мм}.$$

Критерии

1. Записано условие равновесия в начальный момент времени (+ 1 балл).
2. Найдена зависимость площади второго поршня от площади первого (+ 1 балл).
3. Записано равновесие после установления второй гирьки (+ 1 балл).
4. Получена формула для ответа (+ 1 балл).
5. Приведён верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 5. В тазу с водой плавает свеча, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Высота свечи $l_0 = 10$ см, длина стороны основания $a = 2$ см. Плотность материала свечи равна $\rho_с = 0{,}45$ г/см^3. К центру нижнего основания свечи прикреплена невесомая упругая резинка с коэффициентом упругости $k = 100$ Н/м. В начальный момент времени резинка не растянута и имеет длину $L = 16$ см. Плотность воды равна $\rho_в = 1$ г/см^3, высота уровня воды равна $H = 20$ см. Свечу поджигают, и она начинает равномерно и медленно гореть, так что высота свечи уменьшается на 1 см в 1 минуту. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2. Найдите момент времени, когда резинка начнет натягиваться. Найдите момент времени, когда прекратится горение свечи.

Возможное решение

Запишем условие равновесия для свечи:

$$mg + F_{упр} = F_{арх}.$$

При этом нужно учесть, что сила упругости начнет действовать в тот момент, когда резинка начнет натягиваться. Это произойдет тогда, когда сумма длин погруженной части свечи и резинки сравняются с уровнем воды. Найдем момент, в который начнет действовать сила упругости. Обозначим за h длину погруженной в воду части свечи, а за c - скорость сгорания свечи в см/мин. До натяжения резинки:

$$\rho_с a^2 l g = \rho_в a^2 h g,$$

$$h(t) = \frac{\rho_с}{\rho_в} \cdot l(t).$$

Учтем, что

$$l(t) = l_0 - ct.$$

Тогда получаем

$$h(t) = -c\frac{\rho_с}{\rho_в}t + l_0\frac{\rho_с}{\rho_в}.$$

Эта зависимость будет верна до тех пор, пока $h + L > H$ Найдем момент, когда резинка начнет натягиваться:

$$H = L - c\frac{\rho_с}{\rho_в}t + l_0\frac{\rho_с}{\rho_в}.$$

Откуда

$$t_1 = (-H + L + l_0\frac{\rho_с}{\rho_в})\frac{\rho_в}{c \cdot \rho_с}.$$

Подставляя численные значения, находим $t_1 = 10/9$ минут. При этом:

$$l(t_1) = 10 - \frac{10}{9} = \frac{80}{9} = l_1,$$

$$h(t_1) = \frac{80 \cdot 45}{9 \cdot 100} = 4 = h_1.$$

Установим связь растяжения резинки и h:

$$\Delta(t) = H - h(t) - L.$$

Запишем условие равновесия с учетом добавившейся силы упругости:

$$k(H - h(t) - L) + \rho_с a^2 l(t) g = \rho_в a^2 h(t) g.$$

Выразим $h(t)$:

$$h(t) = \frac{k(H - L) + \rho_с a^2 l(t) g}{\rho_в a^2 g + k}.$$

Имея ввиду наличие начального промежутка времени t_1, примем момент начала растяжения за нулевой:

$$h(t) = \frac{k(H - L) + \rho_с a^2 l_1 g}{\rho_в a^2 g + k} - \frac{\rho_с a^2 ctg}{\rho_в a^2 g + k}.$$

Возможны два случая:
1) Свеча погасла, не догорев до конца, поскольку пламя погрузилось в воду:

$$h(t_2) = l(t_2) > 0.$$

2) Свеча полностью прогорела:

$$h(t_2) = l(t_2) = 0.$$

Рассмотрим первый случай:

$$l_1 - ct = \frac{k(H-L) + \rho_\text{с} a^2 l_1 g}{\rho_\text{в} a^2 g + k} - t\frac{\rho_\text{с} a^2 c g}{\rho_\text{в} a^2 g + k},$$

$$t_2 = -\frac{l_1 - \frac{k(H-L)+\rho_\text{с} a^2 l_1 g}{\rho_\text{в} a^2 g + k}}{\frac{\rho_\text{с} a^2 c g - c(\rho_\text{в} a^2 g + k)}{\rho_\text{в} a^2 g + k}} \approx 6{,}1 \text{ мин},$$

$$l_2 = l_1 - 6{,}1 = 2{,}8 \text{ см}.$$

Таким образом, реализуется случай, когда свеча погаснет, не догорев.

Критерии

1. Записано условие равенства сил, действующих на свечу (+ 1 балл).
2. Найдена зависимость длины погруженной части свечи от времени (+ 1 балл).
3. Найден момент, когда начнет натягиваться резинка (+ 1 балл).
4. Найдена новая зависимость длины погруженной части свечи от времени (+ 1 балл).
5. Приведён верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.