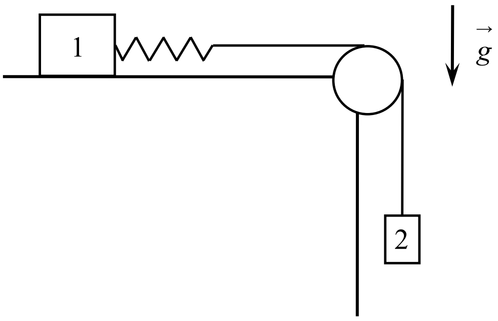
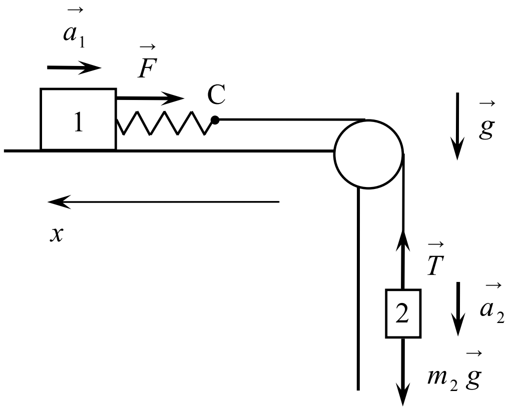
Задача 1. На краю горизонтального стола закреплена труба, через которую переброшена длинная нерастяжимая нить. Горизонтальный конец нити привязан к невесомой пружине, прикреплённой к грузу 1. На вертикальном конце нити подвешен груз 2. В начальном положении груз 1 удерживают, груз 2 неподвижен, удлинение пружины равно x_1. Груз 1 отпускают без толчка. Найдите минимальное значение x_2 удлинения пружины при дальнейшем движении грузов. Известно отношение масс грузов $\beta = m_1/m_2 = 7/4$. Ответ выразите в виде отношения x_2/x_1 и округлите до сотых. Массу нити, массу пружины и трение не учитывайте.



Возможное решение



Рассмотрим начальное положение, в котором груз 1 неподвижен. В этом случае сила тяжести, действующая на груз 2, уравновешивается силой натяжения нити, которая равна силе упругости, возникающей в пружине:

$$m_2\,g = k\,x_1 \quad \longrightarrow \quad x_1 = \frac{m_2\,g}{k}\,.$$

Здесь k — жёсткость пружины. Обозначим через $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ ускорения грузов в неподвижной системе отсчёта, связанной со столом. Для дальнейшего ось x этой системы удобно направить влево. Запишем второй закон Ньютона для грузов:

$$m_1\,a_{1x} = -F\,, \quad m_2\,a_2 = m_2\,g - T\,,$$

a_{1x} — проекция ускорения $\overrightarrow{a_1}$ на ось x, F — абсолютная величина силы упругости, действующей на груз 1 со стороны пружины, T — абсолютная величина силы натяжения нити. Так как нить и пружина невесомы, то

$$T = F\,.$$

Рассмотрим движение точки C, в которой нить прикреплена к пружине. Вектор ускорения $\overrightarrow{a_c}$ этой точки направлен вправо и по абсолютной величине равен a_2. Представим ускорение $\overrightarrow{a_1}$ в виде:

$$\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a}'\,,$$

где $\overrightarrow{a}'$ — ускорение груза 1 в системе отсчёта, связанной с точкой C. В проекциии на ось x имеем:

$$a_{1x} = -a_2 + a'_x\,.$$

Из написанных выше соотношений получаем:

$$a_2 = g - \frac{T}{m_2} = g - \frac{F}{m_2}\,,$$

$$m_1\,(-a_2 + a'_x) = -F \quad \to \quad -m_1\,g + F\,\frac{m_1}{m_2} + m_1\,a'_x = -F\,,$$

$$m_1\,a'_x = -F\,\frac{m_1 + m_2}{m_2} + m_1\,g\,.$$

Введём величину μ, имеющую размерность массы:

$$\mu = \frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}\,.$$

Тогда последнее уравнение принимает вид:

$$\mu\,a'_x = -F + \mu\,g\,.$$

Таким образом, исходная задача сведена к более простой задаче о движении одного груза массой μ под действием силы упругости и силы тяжести. Очевидно, что такой груз колеблется около положения равновесия. Найдём удлинение пружины x_p в этом положении:

$$k\,x_p = \mu\,g \quad \to \quad x_p = \frac{\mu\,g}{k} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,x_1\,.$$

Максимальное отклонение A от положения равновесия (амплитуда колебаний) равно:

$$A = x_1 - x_p = \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)\,x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,x_1\,.$$

Для минимального удлинения пружины получаем:

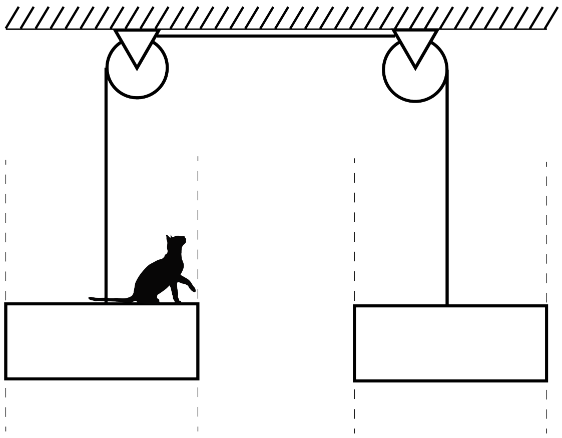
$$x_2 = x_p - A = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,x_1\,,$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} = \frac{3}{11} = 0{,}27$$

Критерии

1. Верно написан второй закон Ньютона для грузов (+ 1 балл).
2. Верно рассмотрено ускорение точки C относительно ускорения первого груза (+ 2 балла).
3. Задача сведена к задаче о гармонических колебаниях груза массой μ (+ 3 балла).
4. Верно найдена амплитуда колебаний (+ 1 балла).
5. Верно найдено минимальное значение удлинения пружины при дальнейшем движении грузов и получен верный численный ответ (+ 3 балла).

Задача 2. Кот Фотон прыгает с одной платформы на другую, которые соединены между собой натянутой невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через идеальные блоки. Платформы могут скользить без трения вдоль вертикальных направляющих. Масса каждой платформы M. Известно, что Фотон умеет перепрыгивать пятикратное расстояние между платформами прыгая с твердой горизонтальной поверхности земли. Какую максимальную массу может иметь Фотон, чтобы допрыгнуть до второй платформы? Под каким углом к горизонту в этом случае ему надо прыгнуть? Перед прыжком платформы покоятся и удерживаются на одном уровне. Смещением платформы в процессе отталкивания пренебречь.



Возможное решение

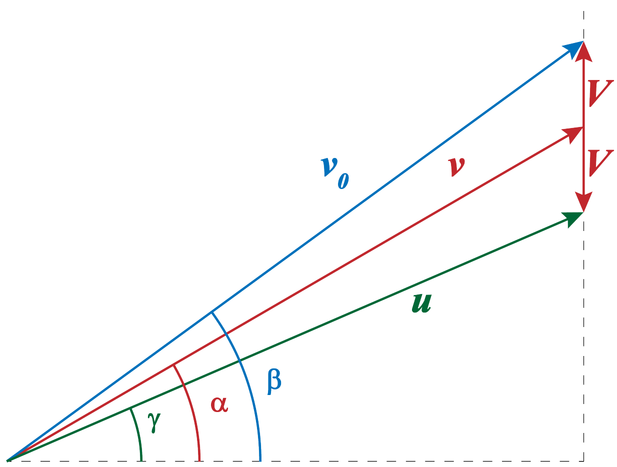
В процессе отталкивания кота Фотона от платформы (далее будем называть эту платформу первой, а платформу на которую кот приземляется — второй) выполняется закон сохранения импульса по вертикали

$$mv\sin\alpha - MV = P_T,$$

где P_T — импульс силы натяжения нити. Для второй платформы, учитывая невесомость и нерастяжимость нити:

$$P_T = MV.$$

Исключая импульсы сил из уравнений, получим $V = \frac{m}{2M}v\sin\alpha = \lambda v\sin\alpha$. Пока кот летит с первой платформы на вторую, платформы двигаются вертикально с постоянными скоростями, и могут быть рассмотрены как инерциальные системы отсчета. Красным на рисунке обозначены величины в



лабораторной системе отсчета, синим — в системе первого блока, зеленым — второго. Для проекций скоростей можем записать следующие соотношения:

$$\begin{cases} v_0\cos\beta = \quad v\cos\alpha = \quad u\cos\gamma \quad \text{(по горизонтали)} \\ v_0\sin\beta - V = \quad v\sin\alpha = \quad u\sin\gamma + V \quad \text{(по вертикали)} \end{cases}$$

Сформулируем требования задачи в терминах скоростей. Для того, чтобы кот Фотон (в случае максимальной массы) смог допрыгнуть до второй платформы, должно выполняться $\frac{2u^2}{g}\sin\gamma\cos\gamma = L$. Умение перепрыгивать пятикратное расстояние ($k = 5$) выразится в величине скорости прыжка относительно первой платформы $\frac{v_0^2}{g} = kL$.

Выразим все величины через v и α и решим эту систему уравнений относительно λ. Получим

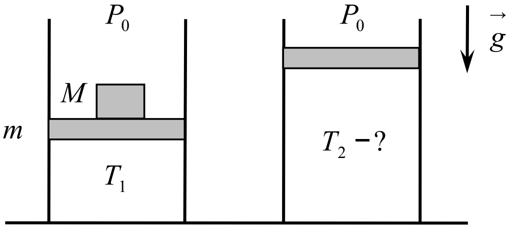
$$\lambda = -1 - \frac{5}{tg\alpha} + 2\sqrt{\frac{1}{tg\alpha}(\frac{6}{tg\alpha} + 5)}$$

Это выражение достигает максимума при искомом угле прыжка $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$, а $\lambda = \frac{2}{3}$. Отсюда максимальная масса кота Фотона равна $m = \frac{4}{3}M$.

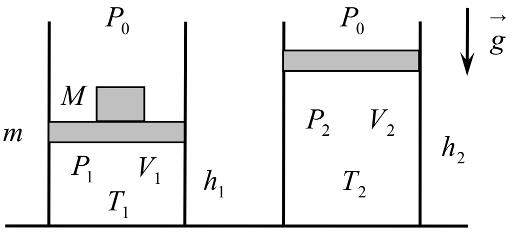
Критерии

1. Верно написаны законы сохранения импульса для платформ и кота Фотона (+ 1 балл).
2. Верно написано выражение для максимальной скорости кота Фотона в инерциальной системе отсчета (+ 1 балл).
3. Верно написаны соотношения проекций скоростей в разных системах отсчета (+ 2 балла).
4. Получена зависимость отношения масс кота Фотона и двух платформ от угла прыжка (+ 4 балла).
5. Найден угол прыжка в одной из систем отсчета (+ 1 балл).
6. Найдена максимальная масса кота Фотона (+ 1 балл).

Задача 3. Вакуумная камера большого объёма заполнена воздухом при давлении $P_0 = 1$ кПа. В камере расположен высокий вертикальный цилиндр площадью поперечного сечения $S = 100$ см^2. Сверху цилиндр закрыт поршнем массой $m = 1$ кг, на котором стоит груз массой $M = 2$ кг. Под поршнем находится гелий при температуре $T_1 = 300$ К. В начальном состоянии давление гелия уравновешивает внешнее давление. Груз убирают, и через некоторое время система переходит в конечное равновесное состояние. Найдите температуру T_2 гелия в этом состоянии. Числовой ответ выразите в кельвинах и округлите до целого значения. Стенки цилиндра и поршень не проводят тепло, поршень движется без трения, давление воздуха в камере постоянно. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение



Пусть P_1 и P_2 — начальное и конечное давления гелия, V_1 и V_2 — начальный и конечный объёмы, h_1 и h_2 — высоты поршня над дном цилиндра:

$$V_1 = Sh_1\,, \quad V_2 = Sh_2\,.$$

Запишем первое начало термодинамики для гелия:

$$0 = \frac{3}{2}\,\nu RT_2 - \frac{3}{2}\,\nu RT_1 + A\,,$$

ν — число молей, A — работа силы давления гелия на поршень. Рассмотрим баланс энергии для поршня:

$$mg\,(h_2 - h_1) = A + A_0\,.$$

В левой части этого уравнения стоит приращение механической энергии поршня, в правой части — сумма работ сил давления. A_0 — работа постоянной силы внешнего давления P_0S. Учитывая, что поршень перемещается вверх на расстояние $(h_2 - h_1)$, получаем:

$$A_0 = -P_0S\,(h_2 - h_1)\,, \quad A = mg\,(h_2 - h_1) - A_0 = (h_2 - h_1)\,(P_0S + mg)\,.$$

Подставим выражение для A в уравнение первого начала термодинамики:

$$0 = \frac{3}{2}\,\nu RT_2 - \frac{3}{2}\,\nu RT_1 + (h_2 - h_1)\,(P_0S + mg)\,.$$

Соберём в левой части уравнения слагаемые, относящиеся к конечному состоянию, в правой части — к начальному:

$$\frac{3}{2}\,\nu RT_2 + (P_0S + mg)\,h_2 = \frac{3}{2}\,\nu RT_1 + (P_0S + mg)\,h_1\,.$$

Запишем условия равновесия поршня:

$$P_1 S = P_0 S + (m + M)\, g\,, \quad P_2 S = P_0 S + mg\,.$$

Из уравнения состояния гелия имеем:

$$P_1 V_1 = P_1 S h_1 = \nu R T_1 \quad \longrightarrow \quad h_1 = \frac{\nu R T_1}{P_1 S} = \frac{\nu R T_1}{P_0 S + (m + M)\, g}\,,$$

$$(P_0 S + mg)\, h_2 = P_2 S h_2 = P_2 V_2 = \nu R T_2\,.$$

Получаем:

$$\frac{3}{2}\nu R T_2 + \nu R T_2 = \frac{3}{2}\nu R T_1 + \frac{(P_0 S + mg)\,\nu R T_1}{P_0 S + (m + M)\, g} \quad \longrightarrow \quad \frac{5}{2} T_2 = \frac{3}{2} T_1 + T_1 \left(1 - \frac{Mg}{P_0 S + (m + M)\, g}\right)\,,$$

$$\frac{5}{2} T_2 = \frac{5}{2} T_1 - T_1 \frac{Mg}{P_0 S + (m + M)\, g} \quad \longrightarrow \quad T_2 = T_1 \left(1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{Mg}{P_0 S + (m + M)\, g}\right)\,.$$

Подставим числовые значения в системе СИ:

$$T = 300 \left(1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{2 \cdot 10}{10^3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10}\right) = 300 \cdot \frac{4}{5} = 240 \text{ K}$$

Следует отметить, что в данной задаче нельзя пользоваться уравнением адиабаты, поскольку рассматриваемый процесс является необратимым. При этом значение температуры T_2, найденное из этого уравнения, не очень сильно отличается от значения, полученного выше. Учитывая, что для гелия показатель адиабаты $\gamma = 5/3$, имеем:

$$PV^{\gamma} = \text{const} \quad \longrightarrow \quad \frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma - 1}} = \text{const}\,,$$

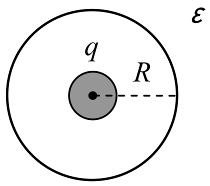
$$\frac{T_2^{\gamma}}{P_2^{\gamma-1}} = \frac{T_1^{\gamma}}{P_1^{\gamma-1}} \quad \longrightarrow \quad T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\,,$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_0 S + mg}{P_0 S + (m + M)\, g} = \frac{1}{2}\,, \quad \frac{\gamma - 1}{\gamma} = \frac{2}{5} \quad \longrightarrow \quad T_2 = \frac{300}{2^{2/5}} = 227 \text{ K}$$

Критерии

1. Верно написано первое начало термодинамики для гелия (+ 2 балл).
2. Верно написана работа силы давления гелия на поршень (+2 балл).
3. Верно написаны условия равновесия поршня (+ 2 балла).
4. Верно написано уравнение состояния гелия (+ 2 балла).
5. Найдена температура гелия в конечном состоянии (+ 1 балл).
6. Получен численный ответ (+ 1 балл).

Задача 4. Твердый однородный диэлектрик с проницаемостью $\varepsilon = 3$ заполняет всё пространство за исключением сферической полости радиуса $R = 5$ см. В полости находится металлический шар, несущий заряд $q = 10$ нКл. Радиус шара меньше радиуса полости, центры шара и полости совпадают. Найдите электрическое давление P на поверхность полости (силу, действующую на единицу площади поверхности со стороны электрического поля). Ответ выразите в миллипаскалях и округлите до десятых. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.



Возможное решение

Мысленно увеличим радиус полости на малую величину ΔR, подействовав изнутри на её поверхность силами давления P. Работа этих сил определяется "газовой" формулой

$$A = P\Delta V\,,$$

где ΔV — приращение объёма полости:

$$\Delta V = 4\pi R^2 \Delta R\,.$$

С другой стороны, работа A равна приращению энергии электрического поля:

$$A = \Delta W\,.$$

Представим шар с диэлектриком как сферический конденсатор, обкладками которого являются сам шар и проводяшая сфера бесконечно большого радиуса. Если принять потенциал сферы за нуль, то напряжение на конденсаторе равно потенциалу шара φ. Тогда энергия поля равна:

$$W = \frac{q\varphi}{2}\,.$$

Обозначим через Q поляризационный заряд, индуцированный электрическим полем шара на поверхности полости. Для того чтобы найти его, рассмотрим в диэлектрике некоторую точку, лежащую на расстоянии r от центра шара. Напряжённость электрического поля в этой точке равна:

$$E = \frac{k\,q}{\varepsilon\, r^2}\,, \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,.$$

Физической причиной ослабления поля в диэлектрике является наличие заряда Q , действие которого частично компенсирует электрическое поле шара. Поэтому заменим диэлектрик сферой радиуса R, несущей заряд Q. Тогда для напряжённости поля в диэлектрике имеем:

$$E = \frac{k\,q}{r^2} + \frac{k\,Q}{r^2} = \frac{k\,(q+Q)}{r^2}\,.$$

Приравнивая два выражения для E, находим заряд Q:

$$\frac{k\,q}{\varepsilon\, r^2} = \frac{k\,(q+Q)}{r^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{q}{\varepsilon} = q + Q \quad \longrightarrow \quad Q = \frac{q}{\varepsilon} - q = -q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = -\frac{q\,(\varepsilon-1)}{\varepsilon}\,.$$

Обозначим через ρ радиус шара. Тогда потенциал шара равен:

$$\varphi = \frac{k\,q}{\rho} + \frac{k\,Q}{R} = k\,q\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon\,R}\right)\,.$$

Энергия поля равна:

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{k\,q^2}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon\,R}\right).$$

Считая энергию поля функцией радиуса полости R, получаем:

$$\Delta\,W = W\,(R + \Delta\,R) - W\,(R) = \frac{k\,q^2\,(\varepsilon - 1)}{2\,\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + \Delta\,R}\right) = \frac{k\,q^2\,(\varepsilon - 1)\,\Delta\,R}{2\,\varepsilon\,R\,(R + \Delta\,R)} \approx \frac{k\,q^2\,(\varepsilon - 1)\,\Delta\,R}{2\,\varepsilon\,R^2}.$$

Радиус шара в этом выражении выпадает. Приравнивая два выражения для работы A, находим электрическое давление:

$$P \cdot 4\pi R^2 \Delta\,R = \frac{k\,q^2\,(\varepsilon - 1)\,\Delta\,R}{2\,\varepsilon\,R^2} \quad \longrightarrow \quad P = \frac{k\,q^2\,(\varepsilon - 1)}{8\,\pi\,\varepsilon\,R^4} = \frac{q^2\,(\varepsilon - 1)}{32\,\pi^2\,\varepsilon_0\,\varepsilon\,R^4}$$

Подставим числовые значения в системе СИ:

$$P = \frac{10^{-16} \cdot 2}{32\,\pi^2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 10^{-8}} = 3{,}8\ \text{мПа}$$

Приращение энергии поля можно вычислить по–другому, воспользовавшись формулой для плотности энергии:

$$u = \frac{\varepsilon_0\,\varepsilon\,E^2}{2}.$$

При увеличении радиуса полости напряжённость и плотность энергии меняются только в слое объёма $\Delta\,V$. Если радиус полости равен R, то слой заполнен диэлектриком и плотность энергии равна:

$$u_1 = \frac{\varepsilon_0\,\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\,\varepsilon\,R^2}\right)^2 = \frac{q^2}{32\,\pi^2\,\varepsilon_0\,\varepsilon\,R^4}.$$

После того как радиус полости увеличился на $\Delta\,R$, диэлектрика в слое уже нет и плотность энергии равна:

$$u_2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\,R^2}\right)^2 = \frac{q^2}{32\,\pi^2\,\varepsilon_0\,R^4}.$$

Для приращения энергии поля получаем:

$$\Delta\,W = u_2\,\Delta\,V - u_1\,\Delta\,V = (u_2 - u_1)\,\Delta\,V.$$

Теперь находим электрическое давление:

$$A = \Delta\,W \quad \longrightarrow \quad P\Delta\,V = (u_2 - u_1)\,\Delta\,V,$$

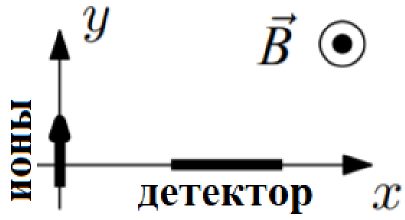
$$P = u_2 - u_1 = \frac{q^2}{32\,\pi^2\,\varepsilon_0\,R^4}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{q^2\,(\varepsilon - 1)}{32\,\pi^2\,\varepsilon_0\,\varepsilon\,R^4}$$

Получился тот же ответ.

Критерии

1. Представлена идея нахождения работы силы, действующей со стороны электрического поля, по термодинамической аналогии. (+ 2 балла).
2. Верно написано выражение для работы через приращение энергии (+1 балл).
3. Представлена идея, о том что в условиях задачи шар с диэлектриком можно рассматривать как сферический конденсатор (+ 2 балла).
4. Верно найден потенциал шара (+ 4 балла).
5. Физически верными рассуждениями получен верный формульный и численный ответ (+ 1 балл).

Задача 5. Методом масс-спектрометрии в лаборатории был проведен эксперимент по исследованию некоторого вещества. Измеренная молярная масса вещества составила $\mu_1 = 86,1$ г/моль. Вещество было ионизировано (каждый атом потерял один электрон) затем ускорено в электрическом поле с разностью потенциалов $U = 4$ кВ и направлено в магнитное поле с индукцией $B = 0{,}89$ Тл. Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости движения ионов и действует в области $y > 0$. Начальная скорость ионов направлена по оси y. Вещество попало под действие магнитного поля в начале координат. Было замечено, что небольшое количество вещества попало на детектор на расстояние $d = 0{,}1$ см дальше по оси x, относительно попадания остального количества вещества. Исходя из этого, было сделано предположение, что некоторое количество атомов-изотопов в исследуемом веществе имеет другую молярную массу. Найдите молярную массу μ_2 этого изотопа. Число Авогадро $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, а заряд электрона равен $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.



Возможное решение

В процессе ионизации каждый атом теряет один электрон и, при последующем ускорении в потенциале U и соответствующим изменении кинетической энергии, ионизированный атом приобретает скорость v:

$$\frac{mv^2}{2} = eU \Rightarrow v = \frac{\sqrt{2eU}}{m}$$

Поскольку скорость ионизированного атома v перпендикулярна магнитному полю B, под действием силы Лоренца он будет двигаться по окружности постоянного радиуса R:

$$eBv = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{eB}$$

К тому времени, когда ионизированный атом достигает детектора, он покрывает половину круга. Пусть m_2 - масса более тяжелого изотопа, а m_1 - масса более легкого изотопа. В таком случае можно найти связь между массами атомов разного типа:

$$2(R_2 - R_1) = 2\left(\frac{m_2 v_2}{eB} - \frac{m_1 v_1}{eB}\right) = d \Rightarrow m_2 v_2 = m_1 v_1 + \frac{eBd}{2}$$

Поскольку $v_1 = \sqrt{\dfrac{2eU}{m_1}}, v_2 = \sqrt{\dfrac{2eU}{m_2}}$, можно переписать полученное выражение:

$$\sqrt{m_2} = \sqrt{m_1} + \frac{Bd}{2}\sqrt{\frac{e}{2U}}$$

Переходя от обычных масс к молярным и возводя выражение в квадрат, получим ответ:

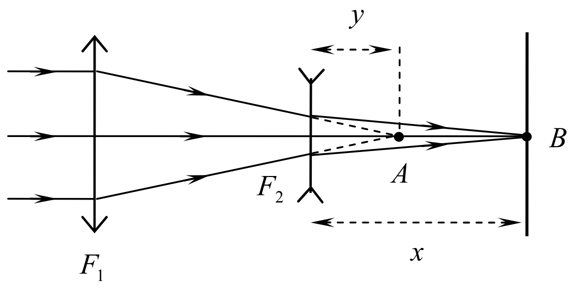
$$\mu_2 = N_A\left(\sqrt{\frac{\mu_1}{N_A}} + \frac{Bd}{2}\sqrt{\frac{e}{2U}}\right)^2 = 87 \text{ г/моль}$$

Критерии

1. Верно найдена скорость атома в момент его вхождения в магнитное поле (+ 2 балла).
2. Верно найден радиус окружности, по которой в магнитном поле будет двигаться ионизированный атом (+2 балла).
3. Верно найдено соотношение между массами разных изотопов (+ 3 балла).
4. Получено верное выражение для молярной массы тяжелого изотопа (+ 2 балл).
5. Получен верный численный ответ (+ 1 балл).

Задача 6. Телескоп, собранный по схеме Галилея, состоит из объектива — собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 2$ м, и окуляра — рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_2 = 4$ см. Главные оптические оси линз совпадают. За окуляром, перпендикулярно главной оптической оси линз, расположен экран, на котором получено изображение Солнца в виде круга диаметром $d = 20$ см. Найдите расстояние x между экраном и окуляром. Угловой диаметр Солнца $\alpha = 0{,}5°$ (угловой диаметр — угол, под которым наблюдатель видит диаметр солнечного диска). Числовой ответ выразите в сантиметрах и округлите до десятых.

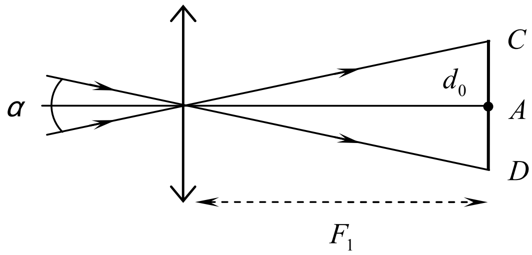
Возможное решение



Выясним сначала, в каком месте нужно расположить окуляр для того, чтобы получить изображение Солнца на экране. Так как Солнце является протяжённым источником, мысленно разобьём его видимую поверхность на малые элементы, каждый из которых будем считать светящейся точкой. Поскольку Солнце расположено на расстоянии, много большем диаметра объектива телескопа, можно считать, что от каждой точки поверхности Солнца в объектив попадает параллельный пучок лучей. Рассмотрим пучок, идущий от центра видимого солнечного диска параллельно главной оптической оси телескопа. Объектив сводит все лучи этого пучка в главный фокус (точка A). Здесь получается первичное изображение центра солнечного диска. Если расположить окуляр справа от этой точки, то на него будет падать пучок лучей, расходящихся из точки A. После преломления в рассеивающем окуляре пучок станет ещё более расходящимся и изображение центра солнечного диска будет мнимым. Поэтому окуляр следует расположить слева от точки A. В этом случае на окуляр падает сходящийся пучок лучей, продолжения которых пересекаются в точке A. Можно подобрать положение окуляра так, чтобы после преломления пучок остался сходящимся и лучи пересеклись в точке B. Тогда эта точка будет действительным изображением центра солнечного диска, которое можно получить на экране.

Искомое расстояние x есть расстояние от окуляра до точки B. Обозначим через y расстояние от окуляра до точки A. Выразим y через x, воспользовавшись формулой линзы. Удобно обратить ход лучей, то есть считать, что в точке B находится действительный источник света, а в точке A его мнимое изображение, построенное окуляром. Тогда

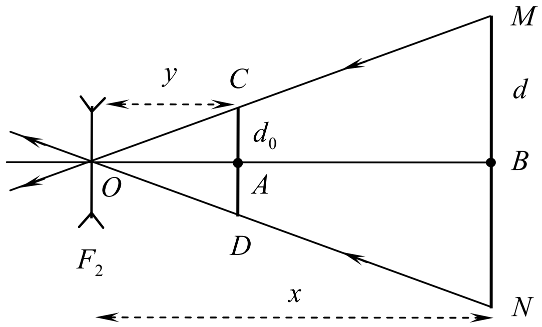
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{F_2} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{F_2}.$$



Рассмотрим теперь вопрос о размерах изображения. Будем считать, что от каждой точки, лежащей на границе солнечного диска, в объектив телескопа попадает параллельный пучок лучей. Объектив собирает каждый такой пучок в точку, лежащую в фокальной плоскости. Эти точки образуют первичное изображение границы солнечного диска в виде окружности диаметра d_0. Для каждого пучка достаточно рассмотреть один луч, идущий без преломления через оптический центр объектива. На рисунке показаны два таких луча, идущие от верхнего и нижнего краёв солнечного диска. Угол между этими лучами равен угловому диаметру Солнца α. Изображения краёв получаются в точках C и D, в которых лучи пересекают фокальную плоскость объектива. Точка C — изображение нижнего края солнечного диска, точка D — верхнего. Таким образом, объектив строит действительное перевёрнутое изображение Солнца. Найдём его диаметр d_0, равный длине отрезка CD. Используя малость угла α, получаем:

$$d_0 = 2F_1 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \approx 2F_1 \cdot \frac{\alpha}{2} = F_1\,\alpha\,.$$

Если теперь расположить окуляр слева от точки A, то первичное изображение Солнца будет играть



роль мнимого источника, а действительное изображение получится на экране. Снова обратим ход лучей, считая источниками точки экрана. Проведём луч через точку C и оптический центр окуляра O. Этот луч пересечёт экран в точке M. В этой точке будет источник, мнимое изображение которого в окуляре расположено в точке C. В итоге точка M является изображением нижнего края солнечного диска на экране. Точно также изображением верхнего края будет точка N, в которой экран пересекает луч DO. Таким образом, изображение Солнца на экране будет перевёрнутым. Его диаметр d равен длине отрезка MN. Из подобия треугольников OCD и OMN получаем:

$$\frac{d}{d_0} = \frac{x}{y}$$

Отсюда, используя полученные ранее выражения для $1/y$ и d_0, находим расстояние x:

$$\frac{d}{d_0} = x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{F_2}\right) \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{d_0} = 1 + \frac{x}{F_2}\,,$$

$$x = F_2\left(\frac{d}{d_0} - 1\right) = F_2\left(\frac{d}{F_1\,\alpha} - 1\right)$$

Подставим числовые значения:

$$\alpha = 0{,}5^\circ = 0{,}5 \cdot \frac{\pi}{180}\ \text{рад} = 8{,}73 \cdot 10^{-3}\ \text{рад}\,,$$

$$x = 4\ \text{см} \cdot \left(\frac{0{,}2\ \text{м}}{2\ \text{м} \cdot 8{,}73 \cdot 10^{-3}} - 1\right) = 41,8\ \text{см}$$

Критерии

1. Верно найдено положение точки мнимого изображения источника света, и верно написана формула рассеивающей тонкой линзы. (+ 2 балла).
2. Верно найден диаметр мнимого изображения (+3 балла).
3. Верно найдено отношение диаметра изображения источника на экране к диаметру мнимого изображения (+ 3 балла).
4. Найдено расстояние между экраном и окуляром (+ 1 балл).
5. Получен верный численный ответ (+ 1 балл).