Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2021

Заключительный этап. 10 класс

Задача 1. Стена абсолютно упруга относительно воздействий вдоль нормали к ее поверхности. Поверхность стены также имеет коэффициент трения $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$. В стену бросают абсолютно твердый кубик так, что одна грань кубика параллельна стене, а скорость кубика $\vec{v}$ составляет угол α с нормалью к поверхности. Найдите зависимость угла β, под которым кубик отскакивает от стены, от угла α. Постройте качественный график функции $\beta(\alpha)$.

Возможное решение

При упругом соударении кубика со стенкой составляющая импульса кубика, нормальная к стенке, изменится на величину:

$$\Delta p_\perp = 2p_\perp.$$

Составляющая импульса параллельная плоскости стенки изменится из-за силы трения:

$$\Delta p_\parallel = F_{\text{тр}}\Delta t.$$

С другой стороны сила трения пропорциональна по модулю силе реакции стенки: $F_{\text{тр}} = \mu N$, где N - сила реакции стены. За время соударения Δt сила реакции меняет нормальную компоненту импульса кубика на $\Delta p_\perp$, следовательно сила трения, пропорциональная по модулю силе реакции в каждый момент времени, изменит другую компоненту импульса на $\mu\Delta p_\perp$ (по модулю). Однако сила трения действует на кубик только до тех пор, пока у него есть ненулевая компонента скорости вдоль поверхности кубика. Поэтому возникает два значимых случая:

$$1)\ \ \mu\Delta p_\perp < p_\parallel.$$

В этом случае после соударения новые компоненты импульса будут $p'_\perp = -p_\perp, p'_\parallel = p_\parallel - 2\mu p_\perp$

$$2)\ \ \mu\Delta p_\perp > p_\parallel.$$

Очевидно, что сила трения не может разгонять кубик в обратную сторону, следовательно во время соударения компонента $p_\parallel$ зануляется, и новые компоненты импульса будут: $p'_\perp = -p_\perp, p'_\parallel = 0$
Теперь можно вычислить углы отражения для каждого из случаев:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|p'_\parallel|}{|p'_\perp|}.$$

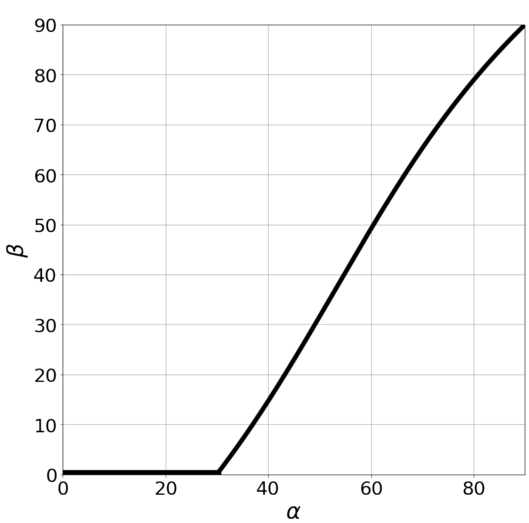
В случае 1 имеем:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|p'_\parallel|}{|p'_\perp|} = \frac{p_\parallel - 2\mu p_\perp}{p_\perp} = \operatorname{tg}\alpha - 2\mu.$$

Подставляя значение μ, получаем

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}30^\circ.$$

Случай 2 отвечает $\operatorname{tg}\beta = 0$, при этом в случае, когда $\mu\Delta p_\perp = p_\parallel$, как раз оказывается, что $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}30^\circ$, так что зависимость угла отражения от угла падения непрерывна.

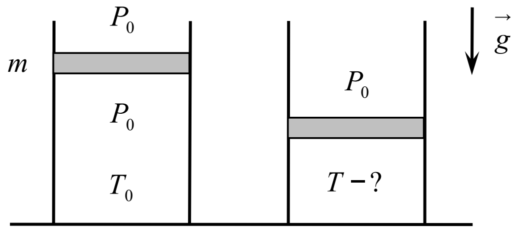


Критерии

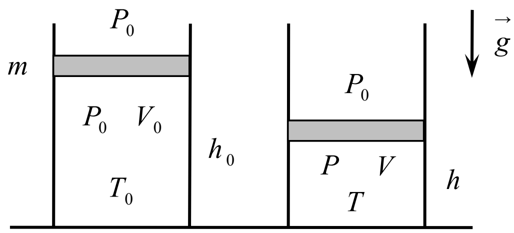
1. Найдена связь изменения тангенциального импульса с силой трения (+ 1 балл).
2. Найдена связь силы трения с силой реакции опоры (+ 1 балл).
3. Найдена связь силы реакции опоры с изменением импульса вдоль нормали (+ 1 балл).
4. Получена верная аналитическая связь между углами α и β (+ 1 балл).
5. Верно построена зависимость $\beta(\alpha)$ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 2. Вакуумная камера большого объёма заполнена воздухом при давлении $P_0 = 1$ кПа. В камере расположен высокий вертикальный цилиндр площадью поперечного сечения $S = 100$ см^2. Сверху цилиндр закрыт поршнем массой $m = 2$ кг. Под поршнем находится гелий при температуре $T_0 = 300$ К. В начальном состоянии поршень закреплён, давление гелия также равно P_0. Поршень отпускают, и через некоторое время система переходит в конечное равновесное состояние. Найдите температуру T гелия в этом состоянии. Числовой ответ выразите в кельвинах и округлите до целого значения. Стенки цилиндра и поршень не проводят тепло, поршень движется без трения, давление воздуха в камере постоянно. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение



Пусть V_0 и V — начальный и конечный объёмы гелия, P — конечное давление, h_0 и h — начальная и конечная высоты поршня над дном цилиндра:

$$V_0 = Sh_0\,, \quad V = Sh\,.$$

Запишем первое начало термодинамики для гелия:

$$0 = \frac{3}{2}\nu RT - \frac{3}{2}\nu RT_0 + A\,,$$

ν — число молей, A — работа силы давления гелия на поршень. Рассмотрим баланс энергии для поршня:

$$mg\,(h - h_0) = A + A_0\,.$$

В левой части этого уравнения стоит приращение механической энергии поршня, в правой части — сумма работ сил давления. A_0 — работа постоянной силы внешнего давления P_0S. Учитывая, что поршень перемещается вниз на расстояние $(h_0 - h)$, получаем:

$$A_0 = P_0S\,(h_0 - h)\,, \quad A = mg\,(h - h_0) - A_0 = (h - h_0)\,(P_0S + mg)\,.$$

Подставим выражение для A в уравнение первого начала термодинамики:

$$0 = \frac{3}{2}\nu RT - \frac{3}{2}\nu RT_0 + (h - h_0)\,(P_0S + mg)\,.$$

Соберём в левой части уравнения слагаемые, относящиеся к конечному состоянию, в правой части — к начальному:

$$\frac{3}{2}\nu RT + (P_0S + mg)\,h = \frac{3}{2}\nu RT_0 + (P_0S + mg)\,h_0\,.$$

Запишем условие равновесия поршня в конечном состоянии:

$$PS = P_0S + mg\,.$$

Из уравнения состояния гелия имеем:

$$(P_0S + mg)\,h = PSh = PV = \nu RT\,,$$

$$P_0V_0 = P_0Sh_0 = \nu RT_0 \quad \longrightarrow \quad h_0 = \frac{\nu RT_0}{P_0S}\,.$$

Получаем:

$$\frac{3}{2}\,\nu RT + \nu RT = \frac{3}{2}\,\nu RT_0 + (P_0S + mg)\,\frac{\nu RT_0}{P_0S} \quad\longrightarrow\quad \frac{5}{2}\,T = \frac{3}{2}\,T_0 + T_0\left(1 + \frac{mg}{P_0S}\right),$$

$$\frac{5}{2}\,T = \frac{5}{2}\,T_0 + T_0\,\frac{mg}{P_0S} \quad\longrightarrow\quad T = T_0\left(1 + \frac{2\,mg}{5\,P_0S}\right).$$

Подставим числовые значения в системе СИ:

$$T = 300\left(1 + \frac{2\cdot 2\cdot 10}{5\cdot 10^3\cdot 10^{-2}}\right) = 300\cdot\frac{9}{5} = 540\ \text{К}.$$

Следует отметить, что в данной задаче нельзя пользоваться уравнением адиабаты, поскольку рассматриваемый процесс является необратимым. Значение температуры T, найденное из этого уравнения, сильно отличается от значения, полученного выше. Учитывая, что для гелия показатель адиабаты $\gamma = 5/3$, имеем:

$$PV^{\gamma} = \text{const} \quad\longrightarrow\quad \frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} = \text{const}\,,$$

$$\frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} = \frac{T_0^{\gamma}}{P_0^{\gamma-1}} \quad\longrightarrow\quad T = T_0\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \frac{mg}{P_0S} = 3\,,\quad \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{2}{5} \quad\longrightarrow\quad T = 300\cdot 3^{\,2/5} = 466\ \text{К}.$$

Критерии

1. Верно записано первое начало термодинамики для гелия (+ 1 балл).
2. Верно получено выражение для работы силы давления газа над поршнем (+ 1 балл).
3. Верно написано уравнение состояния гелия (+ 1 балл).
4. Верно получена температура гелия в конечном состоянии (+ 1 балл).
5. Приведен верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 3. Картофельная пушка, стреляющая горизонтально, представляет собой полуоткрытый цилиндр с площадью поперечного сечения $S = 120$ см^2. Когда из пушки стреляют, картофель находится в состоянии покоя, объем между концом цилиндра и картофелем составляет $V_0 = 3100$ см^3, а давление газа в этом объеме составляет $P_0 = 9 \cdot 10^5$ Па. Газ в баллоне двухатомный: $C_v = 5R/2$ и $C_p = 7R/2$. (Возможно стоит убрать). Картофель движется вниз по цилиндру достаточно быстро, чтобы газ не передавал тепло. Трение между картофелем и бочкой незначительно, а утечка газа вокруг картофеля отсутствует. Параметры P_0, V_0 и S фиксированы, но общая длина L не фиксирована. Атмосферное давление – $P_{\text{атм}} = 10^5$ Па.

1) Какова максимальная кинетическая энергия E_{max}, с которой картофель может вылететь из бочки?

2) Какова длина L в этом случае?

Возможное решение

Пока давление внутри цилиндрической пушки больше, чем давление воздуха извне, картофель будет ускоряться. Следовательно, максимальная энергия будет передана картофелю, если цилиндр будет достаточно длинным для того, чтобы конечное давление внутри цилиндра составляло P_{atm}. Для идеального газа верно $PV = \nu RT$, а энергия идеального двухатомного газа равна

$$E = C_v \nu T.$$

Обозначим полный объём цилиндра как V_f. Максимальная энергия передается картофелю, когда конечное давление составляет атмосферное, поэтому работа, выполняемая газом над картофелем, составляет

$$A = C_v(P_0V_0 - P_{atm}V_f).$$

Но картофель движется против воздуха, поэтому фактическая энергия для картофеля

$$E_{max} = C_v(P_0V_0 - P_{atm}V_f) - P_{atm}(V_f - V_0).$$

Связь, определяющая V_f, связана с адиабатическим расширением для $\gamma = C_p/C_v$:

$$V_f = V_0\left(\frac{P_0}{P_{atm}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Подставляя это выражение в уравнение выше, получаем конечное выражение для энергии:

$$E_{max} = V_0\left(\frac{5}{2}P_0 + P_{atm} - \frac{7}{2}P_{atm}^{2/7}P_0^{5/7}\right) = 2078 \text{ Дж}.$$

Длина трубы определяется как отношение полного объёма цилиндрической пушки к площади её сечения:

$$L = \frac{V_f}{S} = \frac{V_0}{S}\left(\frac{P_0}{P_{atm}}\right)^{5/7} \approx 124 \text{ см}.$$

Критерии

1. Верно написано выражение для энергии газа (+ 1 балл).

2. Верно получено выражение для работы, выполняемой газом над картофелем в процессе выстрела (+ 1 балл).

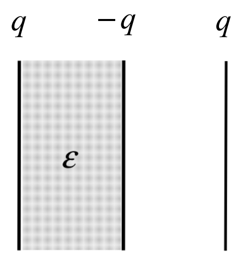
3. Верно написано выражение для полного объёма цилиндра (+ 1 балл).

4. Верно найдено выражение для максимальной кинетической энергии, с которой может вылететь картошка, и приведен верный численный ответ (+ 1 балл).

5. Верно найдена длина пушки и приведен верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 4. Три одинаковые тонкие проводящие пластины расположены параллельно друг другу на равных расстояниях. Каждая из крайних пластин несёт заряд q, заряд средней пластины равен $(-q)$. Всё пространство между левой и средней пластинами заполняют твёрдым однородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 4$ и соединяют крайние пластины тонким проводом (провод не касается средней пластины). Найдите отношение $x = q_1/q_2$, где q_1 и q_2 — установившиеся заряды левой и правой пластин.



Возможное решение

По закону сохранения заряда имеем:

$$q_1 + q_2 = 2\,q.$$

Введём поверхностные плотности зарядов на пластинах:

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{S}\,, \quad \sigma_2 = \frac{q_2}{S}\,, \quad \sigma = \frac{q}{S}\,,$$

S — площадь пластин. Обозначим цифрой 1 область между левой и средней пластинами, цифрой 2 — область между средней и правой. Направим ось x от левой пластины к правой. Напряжённость электрического поля между пластинами направлена по или против этой оси. Для проекции напряжённости на ось x в области 1 имеем:

$$E_{1x} = \frac{\sigma_1 + \sigma - \sigma_2}{2\,\varepsilon\,\varepsilon_0}\,,$$

ε_0 — электрическая постоянная. В области 2:

$$E_{2x} = \frac{\sigma_1 - \sigma - \sigma_2}{2\,\varepsilon_0}.$$

Мысленно перенесём положительный пробный заряд e вдоль оси x с левой пластины на правую. При этом работа сил электрического поля равна:

$$A = eE_{1x}d + eE_{2x}d = ed\,(\,E_{1x} + E_{2x}\,)\,,$$

d — расстояние между соседними пластинами. Та же работа может быть записана в виде:

$$A = e\,(\,\varphi_1 - \varphi_2\,)\,,$$

φ_1 и φ_2 — потенциалы левой и правой пластин. Приравнивая выражения для работы, получаем:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = d\,(\,E_{1x} + E_{2x}\,).$$

Крайние пластины, соединённые проводом, образуют единый проводник, потенциал которого одинаков во всех его точках. Поэтому:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \to \quad E_{1x} + E_{2x} = 0.$$

Подставляя сюда выражения для напряжённостей и переходя к зарядам пластин, получаем:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma - \sigma_2}{\varepsilon} + \sigma_1 - \sigma - \sigma_2 = 0 \quad \to \quad q_1 + q - q_2 + \varepsilon\,(\,q_1 - q - q_2\,) = 0\,,$$

$$(\,q_1 - q_2\,)\,(\,\varepsilon + 1\,) = q\,(\,\varepsilon - 1\,) \quad \to \quad q_1 - q_2 = \frac{q\,(\,\varepsilon - 1\,)}{\varepsilon + 1}.$$

Таким образом, имеем систему двух уравнений для двух неизвестных зарядов q_1 и q_2:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 &= 2\,q \\ q_1 - q_2 &= q\,(\,\varepsilon - 1\,)/(\,\varepsilon + 1\,) \end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения, получаем:

$$q_1 = \frac{q\,(\,3\,\varepsilon + 1\,)}{2\,(\,\varepsilon + 1\,)}\,, \quad q_2 = \frac{q\,(\,\varepsilon + 3\,)}{2\,(\,\varepsilon + 1\,)}.$$

Отношение зарядов равно:

$$x = \frac{q_1}{q_2} = \frac{3\,\varepsilon + 1}{\varepsilon + 3} = \frac{13}{7} = 1,86.$$

Критерии

1. Верно записано выражение для напряженностей электрического поля вдоль оси X в областях $1, 2$ (+ 1 балл).

2. Получена связь между работой сил электрического поля и напряженностей электрического поля вдоль оси X в областях $1, 2$ (+ 1 балл).

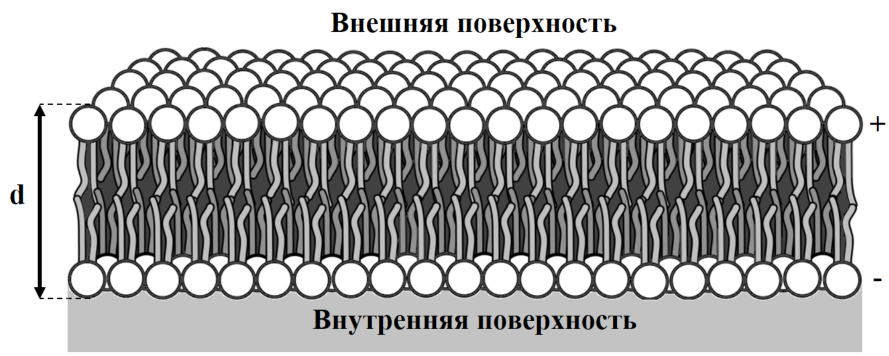
3. Приведен верный закон сохранения заряда (+ 1 балл).

4. Верно получены выражения для зарядов q_1, q_2 (+ 1 балл).

5. Приведен верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 5. Стенка нейрона состоит из эластичной двуслойной липидной мембраны, которая сопротивляется сжатию так же, как пружина. Она имеет эффективную жесткость k и равновесную толщину d_0. Локально рассмотрим участок мембраны, имеющий незначительную кривизну, у которого площадь поверхности каждого из двух слоев равна S. В стенках клетки находятся специальные белковые ионные помпы, которые могут перемещать различные ионы через мембрану. В результирующем заряженном состоянии в межклеточной среде положительный и отрицательный ионный заряд равномерно распределяется вдоль внешней и внутренней поверхностей мембраны соответственно. После того как ионные насосы проделали некоторую работу, на внешней и внутренней поверхностях наводится заряд, поэтому толщина мембраны изменяется до некоторого нового значения. Предположим, что ионные помпы включаются, когда мембрана незаряжена, а мембрана заряжается достаточно медленно (квазистатически). Помпы прекращают работу в случае, если разность напряжений на мембране станет больше определенного порогового значения V_n. Насколько должна быть велика жесткость пружины k, чтобы ионные помпы отключились до того, как мембрана разрушится? Диэлектрическая проницаемость мембраны ε.



Возможное решение

В первую очередь определим напряжение между двумя слоями мембраны нейрона $U = Ed$. Для этого потребуется определить напряженность электрического поля внутри мембраны и измененное после наведения заряда расстояние между её слоями. Одна пластина площадью S с распределенным на ней зарядом, модуль которого обозначим за Q, согласно теореме Гаусса создает электрическое поле напряженностью

$$E_1 = \frac{Q}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Значит, сила, возникающая между двумя такими слоями, будет равна

$$F_E = QE_1 = \frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Данная сила уравновешивается силой, возникающей при сжатии мембраны: $F_k = kx$, где $x = d_0 - d$. Приравнивая выражения, получим новое расстояние между слоями:

$$d = d_0 - \frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 Sk}.$$

В свою очередь поле внутри мембраны между слоями характеризуется напряженностью

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} - \frac{-Q}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Значит, напряжение в области между слоями мембраны равно:

$$V = Ed = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}\left(d_0 - \frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 Sk}\right).$$

Как мы видим, данное выражение зависит от модуля заряда Q кубически. Изучив данную функцию, заметим, что с ростом заряда на поверхности мембраны, связанным с работой ионной помпы, напряжение будет расти и достигнет определенного максимума V_{max}, после чего будет уменьшаться. Ионная помпа прекратит работу, если $V_{max} > V_n$, в противном случае помпы продолжат перегонять ионы одного типа на противоположную сторону до тех пор, пока увеличившийся заряд не разрушит клеточную мембрану (в таком случае d станет равно 0). Тогда найдем V_{max}, продифференцировав функцию напряжения от заряда (аналогичные рассуждения можно проводить, рассматривая зависимость $V(d)$):

$$\frac{dV}{dQ} = \frac{d_0}{\varepsilon\varepsilon_0 S} - \frac{3Q^2}{2\varepsilon^2\varepsilon_0^2 S^2 k} = 0 \Rightarrow Q_{max} = \sqrt{\frac{2d_0\varepsilon\varepsilon_0 Sk}{3}} \Rightarrow V_{max} = \frac{2d_0}{3}\sqrt{\frac{2kd_0}{3\varepsilon\varepsilon_0 S}} = \left(\frac{2d_0}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{k}{\varepsilon\varepsilon_0 S}}.$$

Ограничивая полученное выражение с помощью V_n и возводя выражение в квадрат, получим граничное выражение для жесткости k:

$$k > \left(\frac{3}{2}\right)^3 \frac{V_n^2 \varepsilon\varepsilon_0 S}{d_0^3}.$$

Критерии

1. Верно записаны силы, действующие на мембрану и найдено выражение для напряженности электрического поля, создаваемого одним слоем мембраны (+ 1 балл).

2. Верно найдена зависимость $d(Q)$ (+ 1 балл).

3. Верно найдена зависимость $V(Q)$ (+ 1 балл).

4. Верно найден экстремум зависимости $V(Q)$ - точка (Q_{max}, V_{max}) (+ 1 балл).

5. Записано конечное верное ограничение на жесткость мембраны k (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.