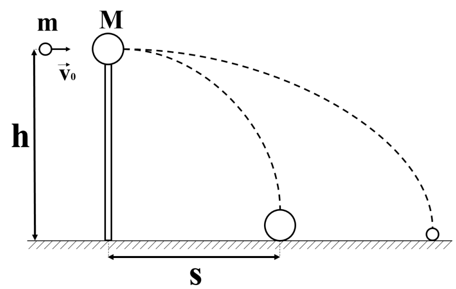
Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2023

Финальный этап. 9 класс

Задача 1. Шар массой $M = 0{,}2$ кг покоится на вертикальной колонне высотой $h = 5$ м. Пуля массой $m = 0{,}01$ кг, летящая горизонтально со скоростью $v_0 = 500$ м/с, проходит горизонтально через шар и летит дальше. В результате шар достигает земли на расстоянии $s = 20$ м от основания колонны. На каком расстоянии от основания колонны пуля достигнет земли? Какая часть кинетической энергии пули перешла в теплоту при прохождении пули через мяч? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение

1) Пусть скорость шара после столкновения равна V, а скорость пули — v. Поскольку на систему "шар + пуля" не действует горизонтальная сила, горизонтальная составляющая импульса этой системы до столкновения и после столкновения должна быть одинаковой:

$$mv_0 = mv + MV \quad \Rightarrow \quad v = v_0 - \frac{M}{m}V.$$

Из условия задачи следует, что $v > V$. После столкновения и шар, и пуля продолжают свободное движение в гравитационном поле с начальными горизонтальными скоростями v и V соответственно. Движение шара и движение пули продолжаются в течение одного и того же времени, равного времени свободного падения с высоты h:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Пути, пройденные шаром и пулей за время t, равны: $s = Vt$ и $d = vt$ соответственно. Таким образом

$$V = s\sqrt{\frac{g}{2h}} \quad \Rightarrow \quad v = v_0 - \frac{M}{m}s\sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

Отсюда получаем выражение и численное значение для искомого расстояния d:

$$d = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{M}{m}s = 100 \text{ м}.$$

2) Полная кинетическая энергия системы равнялась начальной кинетической энергии пули:

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Сразу после столкновения полная кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий пули и шара:

$$E_m = \frac{mv^2}{2}, \quad E_M = \frac{MV^2}{2}.$$

Часть кинетической энергии, равная разности кинетических энергий до и после столкновения, переходит в теплоту:

$$\Delta E = E_0 - (E_m + E_M).$$

Искомое отношение полученной теплоты к начальной кинетической энергии пули:

$$\frac{\Delta E}{E_0} = 1 - \frac{E_m + E_M}{E_0}.$$

Подставляя в выражение найденные ранее соотношения для энергий и скоростей, получаем:

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{M}{m}\frac{s^2}{v_0^2}\frac{g}{2h}\left(2\frac{v_0}{s}\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{M+m}{m}\right) = 92{,}8\%.$$

Ответ:

$$1)\ d = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{M}{m}s = 100\ \text{м},$$

$$2)\ \frac{\Delta E}{E_0} = \frac{M}{m}\frac{s^2}{v_0^2}\frac{g}{2h}\left(2\frac{v_0}{s}\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{M+m}{m}\right) = 92{,}8\%.$$

Критерии

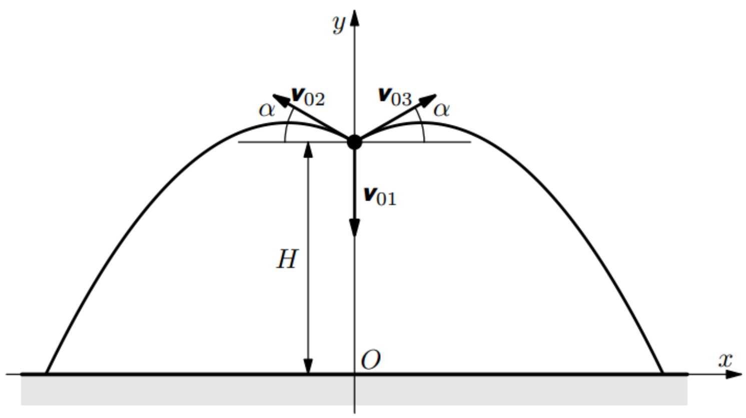
1. Верно записан закон сохранения импульса после столкновения пули с шаром (+ 1 балл).
2. Получено искомое расстояние d (+ 1 балл).
3. Верно найдена часть кинетической энергии, переходящая в теплоту (+ 1 балл).
4. Верно записано выражение для искомого отношения энергий (+ 1 балл).
5. Верно найдено численное значение потери кинетической энергии пули (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 2. Снаряд выпустили вертикально вверх. Он достиг высшей точки траектории на высоте H над землёй и в этот момент разорвался на три осколка равной массы. Все осколки после взрыва начали двигаться с одинаковыми по модулю начальными скоростями. Один осколок, двигаясь строго вертикально вниз, ударился о землю за время $T_1 = 5$ секунд с момента взрыва. Два других осколка упали на землю одновременно за время $T_2 = 10$ секунд с момента взрыва. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

1. Определите высоту H, на которой произошел разрыв снаряда.
2. Определите величины скоростей осколков сразу после разрыва снаряда и в момент падения на землю.
3. Докажите, что все три осколка в интервале времени от момента разрыва снаряда до T_1 расположены на окружности с переменным радиусом, и опишите движение центра этой окружности с переменным радиусом.

Возможное решение



Закон сохранения импульса применим к движению осколков

$$m\vec{v_{01}} + m\vec{v_{02}} + m\vec{v_{03}} = 0.$$

Так как все осколки имеют одинаковую массу, мы можем написать:

$$\vec{v_{01}} + \vec{v_{02}} + \vec{v_{03}} = 0.$$

1) Поскольку выполняется $|v_{01}| = |v_{02}| = |v_{03}| = v_0$, векторы скорости v_{01}, v_{02}, v_{03} образуют между собой углы $120°$, поэтому $\alpha = 30°$. После перехода к проекциям скоростей на оси:

$$v_{01x} = 0,\ v_{02x} = v_0 \cos\alpha,\ v_{03x} = -v_0 \cos\alpha,$$

$$v_{01x} = -v_0,\ v_{02x} = v_0 \sin\alpha,\ v_{03x} = v_0 \sin\alpha.$$

Тогда движение фрагментов можно описать уравнениями:

$$y_1 = H - v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

$$y_{2,3} = H + \frac{v_0 t}{2} - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент удара о землю1-го осколка $y_1 = 0$, в момент удара о землю 2-го и 3-го осколков $y_{2,3} = 0$. Тогда можно найти начальную скорость и высоту:

$$0 = H - v_0 T_1 - \frac{gT_1^2}{2},$$

$$0 = H + \frac{v_0 T_2}{2} - \frac{gT_2^2}{2}.$$

Выразим v_0 из уравнения (1) и подставим его в уравнение (2). Мы получим

$$v_0 = \frac{H - \frac{gT_1^2}{2}}{T_1},$$

$$H = \frac{gT_1T_2}{2}\frac{2T_2 + T_1}{2T_1 + T_2} = 312{,}5 \text{ м}.$$

2a) Вычтем уравнение движения первого осколка из уравнения движения второго и тертьего осколка:

$$v_0(T_1 + \frac{T_2}{2}) + \frac{gT_1^2}{2} - \frac{gT_2^2}{2} = 0 \Rightarrow v_0 = \frac{T_2^2 - T_1^2}{2T_1 + T_2}g = 37{,}5 \text{ м/с}.$$

2b) Для нахождения конечных скоростей используем закон сохранения энергии. Поскольку все осколки падают с одинаковой начальной скоростью с одной высоты, конечная скорость осколков будет одинаковой:

$$mgH + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_k^2}{2} \Rightarrow v_k = \sqrt{v_0^2 + 2gH} = 87{,}5 \text{ м/с}.$$

3) Решим задачу аналитически. Если β — угол наклона вектора скорости к оси x, в общем случае для всех трех фрагментов будет верно:

$$x = v_0 \cos\beta t,$$

$$y = H + v_0 \sin\beta t - \frac{gt^2}{2}.$$

Из этих уравнений следует:

$$\cos\beta = \frac{x}{v_0 t}, \ \sin\beta = \frac{y + \frac{gt^2}{2} - H}{v_0 t}.$$

Далее, используя соотношение $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$, получаем:

$$\frac{x^2}{v_0^2 t^2} + \frac{\left(y + \frac{gt^2}{2} - H\right)^2}{v_0^2 t^2} = 1,$$

$$x^2 + \left(y + \frac{gt^2}{2} - H\right)^2 = v_0^2 t^2.$$

которое представляет собой уравнение окружности с центром в точке $\left(0, H - \frac{gt^2}{2}\right)$ и радиусом $r = v_0 t$.

Ответ:

$$1) H = 312{,}5 \text{ м}, \ 2) \ v_0 = 37{,}5 \text{ м/с}, \ v_k = 87{,}5 \text{ м/с}.$$

Критерии

1. Верно найдена искомая высота H (+ 1 балл).
2. Верно найдены скорости осколков сразу после разрыва снаряда (+ 1 балл).
3. Верно найдены скорости осколков сразу в момент падения на землю (+ 1 балл).
4. Верно найден центр искомой окружности (+ 1 балл).
5. Верно найден радиус искомой окружности (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 3. В калориметре А находится $m = 200$ г воды при температуре $t_{01} = 20°C$, в калориметре В вдвое больше воды при температуре $t_{02} = 80°C$. Далее происходит следующий процесс: из калориметра В переливают $\Delta m = 50$ г воды в калориметр А, после установления теплового равновесия в калориметре А переливают такое же количество воды обратно в калориметр В и ожидают установления теплового равновесия в калориметре В. Далее этот процесс повторяют несколько раз. Какое минимальное количество раз(учитывая первый процесс) потребуется совершить этот процесс, чтобы разность температур в двух калориметрах оказалась меньше $12°C$? Удельная теплоёмкость воды $c = 4200\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot°C}$. Теплоёмкостью каждого калориметра пренебречь. Систему следует считать теплоизолированной.

Возможное решение

1)Из уравнения теплового состояния определим разность температур после первого переливания для воды из первого калориметра(с меньшей температурой) и перелитой водой массы Δm. И выразим из этого уравнения температуру t_1, установившуюся в первом калориметре:

$$cm(t_1 - t_{01}) = c\Delta m(t_{02} - t_1) \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{mt_{01} + \Delta m t_{02}}{m + \Delta m} = \frac{kt_{02} + t_{01}}{k+1}, \text{ где } k = \frac{\Delta m}{m} = 0{,}25.$$

2)После переливания воды обратно во второй калориметр:

$$c(2m - \Delta m)(t_{02} - t_2) = c\Delta m(t_2 - t_1) \quad \Rightarrow \quad 2t_2 = (2-k)t_{02} + kt_1 = (2-k)t_{02} + \frac{k^2 t_{02} + kt_{01}}{k+1} = \frac{k(t_{01} + t_{02}) + 2t_{02}}{k+1}.$$

Тогда разность температур в двух калориметрах после этого переливания будет равна:

$$t_2 - t_1 = \frac{k(t_{01} + t_{02}) + 2t_{02}}{2(k+1)} - \frac{kt_{02} + t_{01}}{k+1} = \frac{2-k}{2(1+k)}(t_{02} - t_{01}) = 42°C.$$

3)Если мы повторим всю процедуру еще раз, то мы закономерно получим:

$$t_4 - t_3 = \frac{2-k}{2(1+k)}(t_2 - t_1) = \left[\frac{2-k}{2(1+k)}\right]^2((t_{02} - t_{01}) = 29°C,$$

где t_3 — температура первого калориметра после второй процедуры, t_4 — температура второго калориметра после второй процедуры.

Повторяя процедуру n раз, мы получим условие на разность температур в калориметрах после n-й процедуры:

$$\left[\frac{2-k}{2(1+k)}\right]^n (t_{02} - t_{01}) = t_{2n} - t_{2n-1} < 12°C.$$

Поскольку $\dfrac{2-k}{2(1+k)} = 0{,}7$ и $t_{02} - t_{01} = 60°C$, упростим неравенство:

$$0{,}7^n < \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad n \geq 5.$$

Таким образом, для достижения разности температур в калориметрах меньше $12°C$ нам придётся повторить всю процедуру 5 раз.

Ответ:

$$n = 5.$$

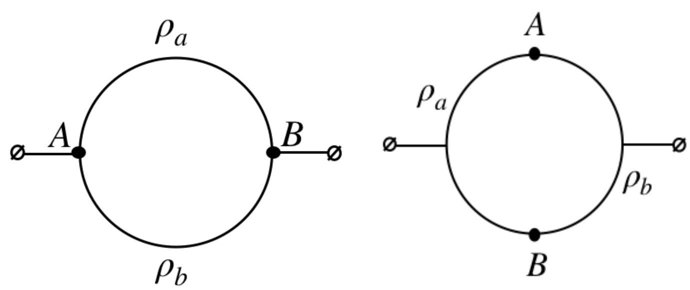
Критерии

1. Верно выражена температура t_1 (+ 1 балл).
2. Верно выражена температура t_2 (+ 1 балл).
3. Верно выражена разность температур после одного полного процесса переливания (+ 1 балл).
4. Верно найдена закономерность изменения разности температур в зависимости от номер процесса (+ 1 балл).
5. Верно найдено искомое количество процессов переливания (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 4. Проводящее кольцо радиуса r изготовлено из двух полуколец, соединённых в точках A и B. Удельное сопротивление провода верхнего полукольца составляет ρ_a, а нижнего – ρ_b. Площади поперечных сечений полуколец одинаковы. Кольцо подключают к внешнему напряжению в точках A и B, после чего измеряют общий ток(суммарный ток в двух полукольцах) I_1. Затем кольцо отключают от внешнего напряжения, поворачивают на $90°$ по часовой стрелке, снова подключают к внешнему напряжению и измеряют общий ток I_2. Во втором измерении оказалось, что соотношение токов равно $I_2 = 0{,}64 I_1$. Найдите отношение удельных сопротивлений $\frac{\rho_a}{\rho_b}$ при условии, что $\rho_a < \rho_b$.

Примечание: сопротивление R провода длины l с площадью поперечного сечения S и удельным сопротивлением ρ рассчитывается по формуле $R = \frac{\rho l}{S}$.



Возможное решение

Ситуация на рисунке 1 эквивалентна подключению двух параллельно соединенных резисторов к внешнему напряжению. Сопротивления резисторов:

$$R_a = \frac{\pi r \rho_a}{S},$$

$$R_b = \frac{\pi r \rho_b}{S}.$$

где r - радиус кольца. Тогда общий ток через цепь есть сумма токов через параллельно подключенные резисторы:

$$I_1 = \frac{U}{R_a} + \frac{U}{R_b},$$

где U - внешнее напряжение. Подставляя в формулу выше выражения для сопротивлений, получаем

$$I_1 = \frac{US}{\pi r}\left(\frac{\rho_a + \rho_b}{\rho_a \rho_b}\right).$$

После повторного подключения кольца цепь снова бужет состоять из двух ветвей, однако на этот раз ветви будут одинаковыми, а каждая из ветвей будет состоять из двух последовательно подключенных резисторов с сопростивлениями $\frac{R_a}{2}$ и $\frac{R_b}{2}$. Таким образом, суммарный ток через цепь после повторного подключения:

$$I_2 = 2\frac{US}{0{,}5R_a + 0{,}5R_b} = 4\frac{US}{\pi r}\left(\frac{1}{\rho_a + \rho_b}\right).$$

По условию

$$I_2 = 0{,}64 I_1 = \frac{16}{25} I_1.$$

Стало быть:

$$\frac{16}{25}\frac{\rho_a + \rho_b}{\rho_a \rho_b} = \frac{4}{\rho_a + \rho_b}.$$

Обозначим $x = \frac{\rho_a}{\rho_b}$. Тогда последнее выражение можно представить как квадратное уравнение:

$$4x^2 - 17x + 4 = 0.$$

Дискриминант $D = 289 - 64 = 225 = 15^2$. Корни уравнения:

$$x_1 = \frac{1}{4},$$

$$x_2 = 4.$$

Так как по условию $\rho_a < \rho_b$, следует выбрать корень $x_1 = \frac{1}{4}$. Таким образом:

$$\frac{\rho_a}{\rho_b} = 0{,}25.$$

Ответ:

$$\frac{\rho_a}{\rho_b} = 0{,}25.$$

Критерии

1. Верно записано выражение для общей силы тока через кольцо при первом подключении (+ 1 балл).

2. Верно записано выражение для общей силы тока через кольцо при втором подключении подключении (+ 1 балл).

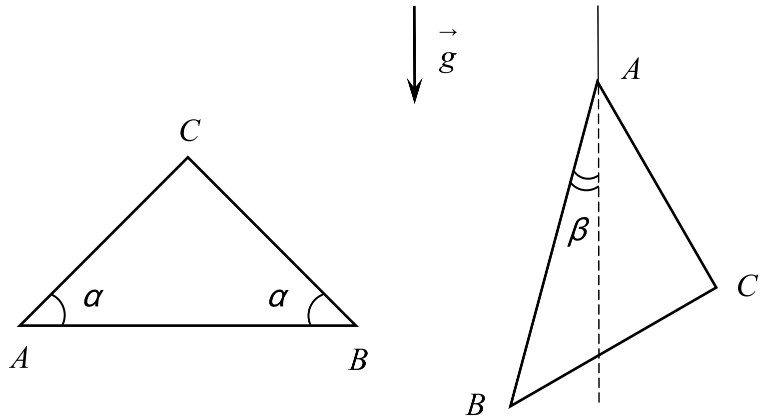
3. Верно получено квадратное уравнение на отношение удельных проводимостей материалов полуколец (+ 1 балл).

4. Верно решено уравнение на отношение удельных проводимостей полуколец (+ 1 балл).

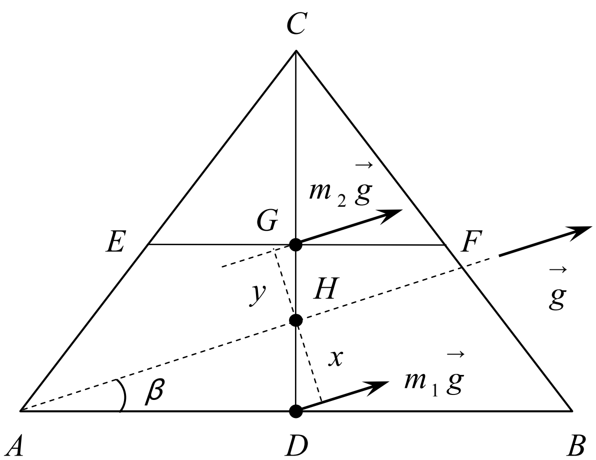
5. Из двух корней квадратного уравнения выбран корень, удовлетворяющий условию задачи, получен верный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 5. Из тонкой однородной проволоки согнут равнобедренный треугольник ABC. Углы при основании AB равны $\alpha = 15°$. Треугольник подвешен на тонкой нити за вершину A и находится в равновесии. Найдите угол β между направлением нити и основанием AB. Числовой ответ выразите в градусах и округлите до десятых.



Возможное решение



Обозначим длину боковой стороны треугольника через a, а её массу через m. Из вершины C опустим перпендикуляр CD на основание AB; точка D — середина основания. Длины отрезков CD и AB равны:

$$CD = a\,\sin\alpha\,, \quad AB = 2a\,\cos\alpha\,.$$

Так как массы сторон треугольника пропорциональны их длинам, масса основания AB равна:

$$m_1 = 2\,m\,\cos\alpha\,.$$

Стянем эту массу в точку D — центр масс (центр тяжести) основания. Массы m боковых сторон стянем в их середины — точки E и F. Эти две массы заменим одной массой $m_2 = 2\,m$, расположенной в точке G — середине средней линии EF. Таким образом, имеем две точечные массы m_1 и m_2, расположенные в точках D и G. Центр масс треугольника H совпадает с центром масс этой пары и лежит на отрезке DG. Найдём положение точки H. Если треугольник подвешен на нити за вершину A, то в положении равновесия отрезок AH параллелен вектору ускорения свободного падения $\overrightarrow{g}$. Условием равновесия является равенство моментов сил $m_1\overrightarrow{g}$ и $m_2\overrightarrow{g}$ относительно оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости рисунка. Проведём через точку H прямую, перпендикулярную отрезку AH. Отрезки этой прямой от точки H до линий действия сил тяжести представляют собой плечи этих сил. На рисунке они обозначены через x и y. Условие равенства моментов даёт:

$$x\,m_1 g = y\,m_2 g \quad \longrightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{m_1}{m_2} = \cos\alpha\,.$$

Далее имеем два подобных прямоугольных треугольника, в которых отрезки x и y являются катетами, а отрезки DH и GH — гипотенузами:

$$\frac{GH}{DH} = \frac{y}{x} = \cos\alpha\,.$$

Кроме того, сумма $DH + GH$ равна половине высоты CD:

$$DH + GH = \frac{CD}{82} = \frac{a}{2}\,\sin\alpha\,.$$

Из полученных соотношений находим длину отрезка DH и угол β:

$$GH = DH\,\cos\alpha\,, \quad DH + DH\,\cos\alpha = \frac{a}{2}\,\sin\alpha \quad \longrightarrow \quad DH = \frac{a\,\sin\alpha}{2\,(\,1+\cos\alpha\,)}\,,$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{DH}{AB/2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2\,(\,1+\cos\alpha\,)} \quad \longrightarrow \quad \beta = \operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2\,(\,1+\cos\alpha\,)}\right] = 3{,}9^\circ\,.$$

Следует отметить, что в этой задаче неправильным является решение, основанное на утверждении, что центр масс треугольника лежит в точке пересечения его медиан. Это утверждение справедливо только для случая, когда масса треугольника равномерно распределена по его площади. При неправильном решении имеем:

$$DH = \frac{CD}{3} = \frac{a}{3}\,\sin\alpha\,, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{DH}{AB/2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{3} \quad \longrightarrow \quad \beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{3}\right)\,.$$

Этот результат совпадает с точным только для равностороннего треугольника, когда $\alpha = 60^\circ$ и $2\,(\,1{+}\cos\alpha\,) = 3$. Заметные отличия от точного значения имеют место либо для малых α, либо для углов близких к 90°. При $\alpha = 15^\circ$ неправильное решение даёт $\beta = 5{,}1^\circ$.

Ответ:

$$\beta = \operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2\,(\,1+\cos\alpha\,)}\right] = 3{,}9^\circ\,.$$

Критерии

1. Стороны треугольника правильно заменены точечными массами (+1 балл).
2. Правильно записано условие равновесия треугольника через моменты сил тяжести (+1 балл).
3. Правильно найдено положение центра масс (+2 балла).
4. Получены правильные буквенный и числовой ответы (+1 балл).