Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2023

Финальный этап. 7 класс

Задача 1. Юный зоолог Вероника проводит серию экспериментов с кузнечиком. Она помещает его на дорожку с нанесёнными на неё делениями разметки и измеряет среднюю скорость его движения за определённый промежуток времени, одинаковый для всех экспериментов. Кузнечик умеет делать длинные прыжки, перемещаясь на два деления за один прыжок, и короткие прыжки, перемещаясь за один прыжок всего на одно деление. В любом случае кузнечик тратит на прыжок одну секунду.

В первом эксперименте кузнечик совершил некоторое количество длинных и коротких прыжков, при этом средняя скорость его движения оказывается равной $\frac{5}{4}$ делений в секунду. Во втором эксперименте кузнечик совершил столько длинных прыжков, сколько коротких прыжков он совершил в первом эксперименте, при этом средняя скорость его продвижения оказывается равной $\frac{7}{4}$ делений в секунду. Какой окажется его средняя скорость в третьем эксперименте, если в нём он совершил в два раза меньше коротких прыжков, чем в первом эксперименте? Ответ округлите до тысячных.

Возможное решение

Обозначим число коротких прыжков в первом эксперименте за m, а число длинных прыжков - за n. Тогда общее число прыжков равно $n + m$ и неизменно для всех экспериментов, т. к. время экспериментов фиксировано, а на каждый прыжок уходит одна секунда.

Принимая во внимание, что короткий прыжок составляет одно деление, а длинный прыжок – два деления, средняя скорость в первом эксперименте вычисляется следующим образом:

$$v_1 = \frac{m + 2n}{(m + n)t} = \frac{5}{4} \text{ дел/с},$$

где $t = 1$ с.

Во втором эксперименте число длинных прыжков совпало с числом коротких прыжков в первом эксперименте. Следовательно, число коротких прыжков во втором эксперименте совпадет с числом длинных прыжков в первом эксперименте. Тогда средняя скорость во втором эксперименте найдется как:

$$v_2 = \frac{n + 2m}{(m + n)t} = \frac{7}{4} \text{ дел/с}.$$

В третьем эксперименте число коротких прыжков составило $\frac{m}{2}$, стало быть число длинных прыжков составило $\frac{m}{2} + n$. Тогда средняя скорость кузнечика в третьем эксперименте находится как:

$$v_3 = \frac{0{,}5m + 2(n + 0{,}5m)}{(m + n)t}.$$

Введем обозначения: $\alpha = \frac{m}{m+n}$, $\beta = \frac{n}{m+n}$. Тогда из первых двух экспериментов получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = \frac{5}{4}, \\ 2\alpha + \beta = \frac{7}{4}. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 4\alpha + 8\beta = 5, \\ 8\alpha + 4\beta = 7. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{4},\ \beta = \frac{1}{4}.$$

Тогда для третьего эксперимента получаем:

$$v_3 = 0{,}5\alpha + 2(\beta + 0{,}5\alpha) = 1{,}5\alpha + 2\beta = \frac{13}{8} = 1{,}625 \text{ дел/с}.$$

Ответ:

$$v_3 = 1{,}625 \text{ дел/с}.$$

Критерии

1. Верно записано выражение для средней скорости в первом эксперименте (+ 1 балл).
2. Верно записано выражение для средней скорости во втором эксперименте (+ 1 балл).
3. Верно записано выражение для средней скорости в третьем эксперименте (+ 1 балл).
4. Верно получено уравнение, связывающее средние скорости движения в первых двух экспеиментах со средней скоростью движения в третьем эксперименте (+ 1 балл).
5. Получен верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 2. Алексей, стоя неподвижно на эскалаторе, поднимается на перрон. Проехав таким образом половину пути, он понял, что перепутал номер платформы. Он решил пойти в направлении, обратном движению эскалатора, чтобы сэкономить время. Если бы эскалатор не двигался, то Алексей спустился бы за 1 минуту. Принимая во внимание, что эскалатор на вокзале поднимает неподвижно стоящего человека на платформу за 3 минуты, рассчитайте, сколько времени потерял Алексей, воспользовавшись неподходящим эскалатором?

Возможное решение

1)Пусть расстояние, на которое перемещает человека эскалатор с самого низа до перрона, равно l метров. Учитывая, что эскалатор поднимает неподвижно стоящего человека на платформу за 3 минуты, скорость эскалатора равна

$$v = \frac{l}{3}\,\frac{\text{м}}{\text{мин}}.$$

2)Обозначим скорость движения Алексея вниз по неподвижному эскалатору за v_A. Известно, что по неподвижному эскалатору он прошёл бы расстояние, равное половине эскалатора $\frac{l}{2}$, за 1 минуту. Тогда его скорость равна

$$v_A = \frac{l/2}{1}\frac{\text{м}}{\text{мин}}.$$

3)Изначально он проехал половину пути на подвижном эскалаторе, затратив 1,5 мин. А затем он пошёл в направлении обратном движению эскалатору, т.е. его относительная скорость равна $v_A - v$. Отсюда полное время, которое Алексей потерял, равно

$$1{,}5\ \textit{мин} + \frac{l/2}{v_A - v} = 1{,}5\ \textit{мин} + \frac{l/2}{l/2 - l/3} = 4{,}5\ \textit{мин}.$$

Ответ:

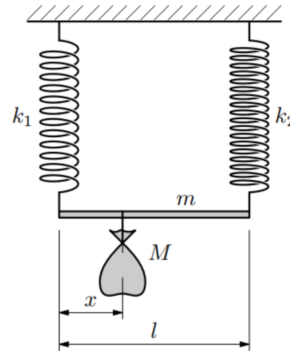
$$4{,}5\ \textit{мин}.$$

Критерии

1. Получена скорость движения эскалатора (+ 1 балл).
2. Получена скорость движения Алексея вниз по неподвижному эскалатору (+ 1 балл).
3. Верно учтено время, которое Алексей потерял, стоя на эскалаторе неподвижно (+ 1 балл).
4. Верно посчитана скорость Алексея при движении обратном движению эскалатора, и верно посчитано расстояние, которое с такой скоростью преодолел Алексей (+ 1 балл).
5. Получен верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 3. Две пружины пренебрежимо малого веса с жёсткостями $k_1 = 16$ Н/м и $k_2 = 32$ Н/м прикреплены к потолку. Концы пружин соединены однородным стержнем постоянного сечения длиной $l = 20$ см и массой $m = 100$ г. К стержню подвешен мешок массой $M = 500$ г. Определите расстояние от левого края стержня до точки $x \in [0; l]$, в которой закреплён мешок, если известно, что стержень удерживается в горизонтальном положении. Ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг.



Возможное решение

Запишем правила моментов относительно правого и левого концов стержня соответственно для состояния равновесия стержня:

$$F_{\text{упр}_1} l = Mg(l-x) + mg\frac{l}{2}, \quad F_{\text{упр}_2} l = Mgx + mg\frac{l}{2}.$$

Отсюда найдем силы упругостей:

$$F_{\text{упр}_1} = Mg\frac{l-x}{l} + \frac{1}{2}mg, \quad F_{\text{упр}_2} = Mg\frac{x}{l} + \frac{1}{2}mg.$$

Поскольку $F_{\text{упр}_1} = k_1 y_1$, $F_{\text{упр}_2} = k_2 y_2$, где по условию $y_1 = y_2$ — удлинение пружин, т.е. справедливо выражение

$$\frac{F_{\text{упр}_1}}{k_1} = \frac{F_{\text{упр}_2}}{k_2}.$$

Подставляя выражения для сил упругости, получим уравнение для x:

$$Mg\frac{l-x}{k_1 l} + \frac{mg}{2k_1} = Mg\frac{x}{k_2 l} + \frac{mg}{2k_2}.$$

Выразим x:

$$x = \frac{Mk_2 + \frac{1}{2}m(k_2 - k_1)}{M(k_1 + k_2)} l = \frac{k_2(2M + m) - k_1 m}{2M(k_1 + k_2)} l.$$

Отметим, что при данных численных значениях действительно $x < l$, что не противоречит условию.
Численный расчёт даёт значение

$$x = 14 \text{ см}.$$

Ответ:

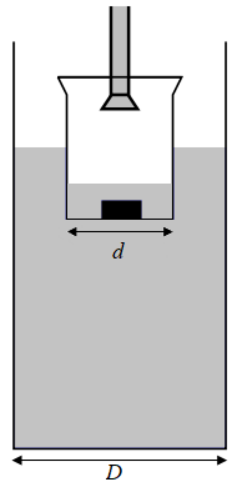
$$x = \frac{k_2(2M + m) - k_1 m}{2M(k_1 + k_2)} l = 14 \text{ см}.$$

Критерии

1. Верно записано правило моментов для состояния равновесия стержня (+ 2 балла).
2. Найдено соотношение между силами упругости (+ 1 балл).
3. Выражено искомое расстояние x (+ 1 балл).
4. Получен верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 4. В сосуд цилиндрической формы с диаметром $D = 10$ см налита вода до высоты $h = 20$ см. Утяжелённый небольшим грузом стакан с диаметром $d = 6$ см и общей массой с грузом $m = 150$ г помещают в сосуд с водой, как показано на рисунке. Каждую секунду в стакан с помощью распылителя добавляют $\Delta m = 10$ г воды с пренебрежимо малой высоты. С какой скоростью v будет двигаться стакан относительно дна сосуда? За какое время t стакан полностью погрузится в воду, если его высота $H = 10$ см? Ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг. Плотность воды $\rho_в = 1$ г/см^3. Объем цилиндра высоты L и радиуса R можно вычислить по формуле $V_ц = \pi R^2 L$.



Возможное решение

Запишем закон Архимеда, чтобы найти связь между уровнем воды в сосуде h_0 и массой воды m_0 в погружающемся стакане:

$$(m + m_0)g = \pi \frac{d^2}{4} h_0 \rho_в g \quad \Rightarrow \quad h_0 = \frac{4(m + m_0)}{\pi \rho_в d^2}.$$

Таким образом, при добавлении воды массой Δm стакан погрузится на $\Delta h = \dfrac{4\Delta m}{\pi \rho_в d^2}$. Величина Δh состоит из двух факторов:

1. Поднятие уровня воды в сосуде $\Delta \tilde{h}$.
2. Приближение стакана ко дну Δs.

Учтем перераспределение объема вытесненной стаканом воды и получим два уравнения:

$$\begin{cases} \Delta h = \Delta s + \Delta \tilde{h}, \\ \Delta s \dfrac{\pi d^2}{4} = \Delta \tilde{h} \dfrac{\pi}{4}(D^2 - d^2). \end{cases}$$

Отсюда $\Delta \tilde{h} = \dfrac{d^2}{D^2 - d^2} \Delta s$.

$$\Delta h = \Delta s\left(1 + \frac{d^2}{D^2 - d^2}\right) = \frac{D^2}{D^2 - d^2} \Delta s$$

$$\Delta s = \frac{D^2 - d^2}{D^2} \Delta h = \frac{D^2 - d^2}{D^2} \frac{4\Delta m}{\rho \pi d^2}$$

Стакан будет двигаться со скоростью

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{D^2 - d^2}{D^2} \frac{4\Delta m}{\pi \rho_в d^2 \Delta t} \approx 2{,}3 \text{ мм/с}$$

Стакан утонет, если глубина его погружения совпадет с высотой стакана при наполнении его некоторой массой воды Δm_1:

$$H = \frac{4(m + \Delta m_1)}{\pi \rho_в d^2} \Rightarrow \Delta m_1 = \pi \frac{d^2}{4} H \rho_в - m$$

Тогда время утопления стакана равно ($\tau = 1$ сек):

$$t = \frac{\Delta m_1}{\Delta m} \tau = \frac{\pi d^2 H \rho_в - 4m}{4\Delta m} \tau \approx 13 \ c$$

Ответ:

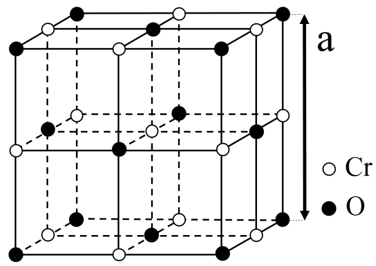
$$v = \frac{D^2 - d^2}{D^2} \frac{4\Delta m}{\pi \rho_в d^2 \Delta t} \approx 2{,}3 \text{ мм/с}, \quad t = \frac{\pi d^2 H \rho_в - 4m}{4\Delta m} \approx 13 \; c.$$

Критерии

1. Записан закон Архимеда для стакана с грузом (+ 1 балл).
2. Получена связь величины погружения стакана и добавленной в стакан массы воды (+ 1 балл).
3. Получена связь высоты стакана и добавленной в стакан массы воды (+ 1 балл).
4. Получено выражение и численный ответ для скорости погружения стакана (+ 1 балл).
5. Получено выражение и численный ответ для времени погружения стакана (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.

Задача 5. Элементарная ячейка оксида хрома(II) (CrO) представляет собой куб с длиной ребра $a = 4{,}45 \cdot 10^{-10}$ м, изображённый на рисунке. Чёрные кружки на рисунке обозначают положение атомов кислорода, а белые — атомов хрома. Весь кристалл оксида хрома(II) является повторением таких элементарных ячеек. Относительная атомная масса кислорода $m_{rO} = 16$ а. е. м., хрома $m_{rCr} = 24$ а. е. м., где а. е. м. - атомная единица массы. Найдите плотность оксида хрома(II), если масса атома водорода $m_H = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг, а относительную массу атома водорода принято считать равной 1 а. е. м.



Возможное решение

Рассчитаем количества атомов хрома n_1 и атомов кислорода n_2, встроенных в одну элементарную кристаллическую ячейку CrO (см. рисунок). Один атом хрома занимает середину клетки и целиком принадлежит клетке. 12 атомов хрома расположены в ребрах большого куба и принадлежат еще трем ячейкам, так что только 1/4 часть каждого атома принадлежит каждой ячейке. Таким образом, на одну ячейку приходится $n_1 = 1 + 12 \times 1/4 = 4$ атома хрома. В одной ячейке 6 атомов кислорода размещены на гранях куба и 8 размещены в вершинах. Каждый атом на гряни куба принадлежит еще одной ячейке, а атом в вершине - еще семи другим. Тогда на одну ячейку приходится $n_2 = 6 \times 1/2 + 8 \times 1/8 = 4$ атома кислорода. Таким образом, на одну элементарную ячейку кристалла CrO приходится 4 атома хрома и 4 атома кислорода.

Масса m такой ячейки равна $m = 4(m_{rCr} + m_{rO})$ а.е.м., где m_{rCr} и m_{rO} — относительные атомные массы хрома и кислорода. Так как масса атома водорода m_H примерно равна одной атомной единице массы: $m_H = 1$ а.е.м., то масса элементарной ячейки CrO равна:

$$m = 4(m_{rCr} + m_{rO})m_H.$$

С другой стороны, масса такой ячейки равна ρa^3. Теперь мы можем выразить искомую плотность оксида хрома (II):

$$\rho = \frac{4m_H(m_{rCr} + m_{rO})}{a^3} \approx 3032 \text{ кг/м}^3.$$

Ответ:

$$\rho = \frac{4m_H(m_{rCr} + m_{rO})}{a^3} \approx 3032 \text{ кг/м}^3.$$

Критерии

1. Верно посчитано количество атомов хрома на одну элементарную ячейку (+ 1 балл).
2. Верно посчитано количество атомов кислорода на одну элементарную ячейку (+ 1 балл).
3. Выражена масса элементарной ячейки через относительную атомную массу хрома, кислорода и водорода (+ 1 балл).
4. Получено верное выражение для плотности оксида хрома (II) (+ 1 балл).
5. Получен верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 5 баллов.