Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2025

Отборочный этап – 10 класс

Задача 1-1 *Сильная точка*

На рисунке изображен в относительных единицах $(V/V_0, T/T_0)$ процесс AB, проводимый с идеальным газом в количестве $\nu = 1,0$ моль. Известно, что процесс AB является дугой окружности с центром в точке $C(0;2)$. При расчетах примите $T_0 = 300$ К, $V_0 = 10$ л. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль $\cdot$ К).

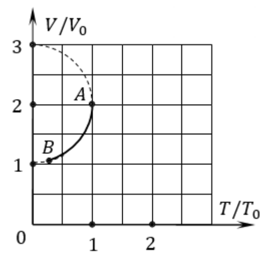


Рис. 1: К задаче 10-1

1.1. Найдите начальное давление p_A идеального газа;

1.2. Найдите максимальное давление $p_{\max}$ идеального газа в данном процессе.

Ответы дайте в кПа с точностью до целых.

Решение

Запишем уравнение Клапейрона - Менделеева

$$pV = vRT = \frac{m}{M}RT,$$

и преобразуем его к виду предложенных безразмерных координат

$$\frac{V}{V_0} = \left(vR\frac{T_0}{V_0} \cdot \frac{1}{p}\right) \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)$$

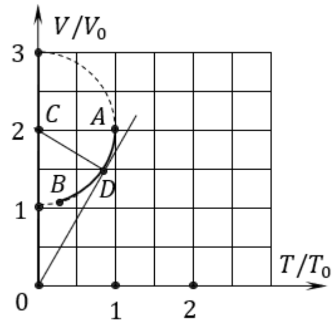
Из полученного соотношения видно, что изобарный процесс в данных координатах является прямой, выходящей из начала координат, с угловым коэффициентом k равным

$$k = vR\frac{T_0}{V_0} \cdot \frac{1}{p}.$$

Поскольку угловой коэффициент k изобары обратно пропорционален давлению идеального газа, то его максимальному давлению $p_{\max}$ будет соответствовать точка с минимальным угловым коэффициентом наклона. Следовательно, на графике необходимо построить касательную к дуге процесса, выходящую из начала координат (рис.).

Из прямоугольного треугольника OCD по теореме Пифагора, с учетом того, что радиус окружности на рисунке равен единице, найдем

$$OD = \sqrt{3}; \quad \sin COD = \frac{1}{2}.$$



Соответственно, координаты точки D будут равны

$$x_D = OD \cdot \sin COD = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$y_D = OD \cdot \cos COD = \frac{3}{2}.$$

Используя полученные координаты, найдем

$$p_{\max} = \left(vR\frac{T_0}{V_0} \cdot \frac{1}{y_D} \right) \cdot (x_D) = 1,44 \cdot 10^5 \text{ Па} = 144 \text{ кПа}.$$

Давление в начальной точке несложно вычислить, находя из графика координаты точки $A\,(x_A; y_A) = A(1;2)$

$$p_A = \left(vR\frac{T_0}{V_0} \cdot \frac{1}{y_A} \right) \cdot (x_A) = 1{,}25 \cdot 10^5 \text{ Па} = 125 \text{ кПа}.$$

Ответ:

1.1) 125

1.2) 144

Задача 1-2 *Сильная точка*

На рисунке изображен в относительных единицах $(V/V_0, T/T_0)$ процесс AB, проводимый с идеальным газом в количестве $\nu = 1,0$ моль. Известно, что процесс AB является дугой окружности с центром в точке $C(0;2)$. При расчетах примите $T_0 = 400$ K, $V_0 = 5$ л. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль $\cdot$ К).

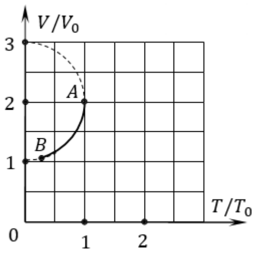


Рис. 2: К задаче 10-1

1.1. Найдите начальное давление p_A идеального газа;

1.2. Найдите максимальное давление $p_{\max}$ идеального газа в данном процессе.

Ответы дайте в кПа с точностью до целых.

Ответ:

1.1) 332

1.2) 384

Задача 2-1 *Упругая перегородка*

Замкнутый сосуд с идеальным газом в форме прямоугольного параллелепипеда длиной $2a = 80$ см, шириной $b = 50$ см и высотой $h = 40$ см перекрыт посередине тонкой подвижной перегородкой, которая может свободно перемещаться внутри сосуда без трения. В правую половину сосуда через отверстие вверху медленно наливают жидкость плотности $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль $\cdot$ К).

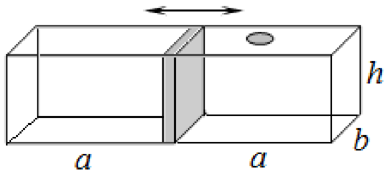


Рис. 3: К задаче 10-2

Какой объем жидкости можно налить в сосуд, если атмосферное давление равно $p_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Па, а температура газа остаётся постоянной? Ответ дайте в литрах с точностью до целых.

Решение

Из условия равновесия подвижной перегородки следует, что сила давления на неё газа слева должна быть равна силе давления жидкости справа.

Следовательно

$$pS = (p_0 + \rho g h/2)\, S$$

где $S = ab$ - площадь перегородки, p_0 - атмосферное давление. После сокращения на S, находим, что давление сжатого газа в левой части сосуда равно

$$p = p_0 + \rho g h/2$$

Из закона Бойля-Мариотта (температура постоянна) для идеального газа в левой части сосуда имеем

$$p_0 V_0 = \left(p_0 + \frac{\rho g h}{2}\right)(2V_0 - V)$$

где $V_0 = bha = 80$ л, V - искомый объём налитой жидкости (перегородка тонкая, её объёмом можно пренебречь).

Получаем величину объёма налитой жидкости в сосуд

$$V = \frac{p_0 + \rho g h}{p_0 + \rho g h/2} V_0 = \frac{p_0 + \rho g h}{p_0 + \rho g h/2} bha = \frac{2\,(p_0 + \rho g h)}{2p_0 + \rho g h} bha$$

Расчёт по итоговой формуле даёт

$$V = 8,2 \cdot 10^4 \text{ см}^3 = 82 \text{ л}.$$

Ответ: 82.

Задача 2-2 *Упругая перегородка*

Замкнутый сосуд с идеальным газом в форме прямоугольного параллелепипеда длиной $2a = 100$ см, шириной $b = 40$ см и высотой $h = 50$ см перекрыт посередине тонкой подвижной перегородкой, которая может свободно перемещаться внутри сосуда без трения. В правую половину сосуда через отверстие вверху медленно наливают жидкость плотности $\rho = 0,9 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль $\cdot$ К).

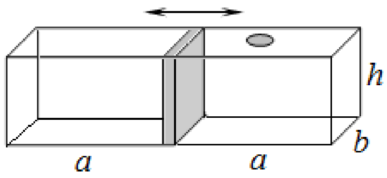


Рис. 4: К задаче 10-2

Какой объем жидкости можно налить в сосуд, если атмосферное давление равно $p_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Па, а температура газа остаётся постоянной? Ответ дайте в литрах с точностью до целых.

Ответ: 102.

Задача 3-1 *Жидкое равновесие*

В вертикальную U-образную трубку малого постоянного сечения $s = 8{,}00$ см^2 налита вода, общая длина которой в обоих коленах составляет $l = 50{,}0$ см. В одно колено трубки помещают два поршня, между которыми имеется пружина жесткости $k = 1{,}00$ Н/м. Поршни воду не пропускают и могут скользить по трубке без трения. В начальный момент на верхний поршень ставят груз массой $m = 10{,}0$ г. Определите количество теплоты, выделившееся в системе в ходе установления равновесия. Массой поршней и пружины можно пренебречь. Воду считайте идеальной несжимаемой жидкостью. Длиной горизонтального участка U-образной трубки можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2.

Ответ дайте в мДж с точностью до сотых.

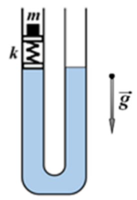
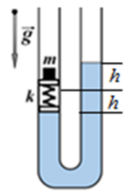


Рис. 5: К задаче 9-2

Решение

После установки груза m система выйдет из положения равновесия, поскольку сила давления жидкости в левом колене станет больше.



Пусть в новом установившемся положении равновесия жидкость в правом колене поднялась на высоту h (Рис.), а пружина сжалась на величину Δx, тогда из правила сил для равновесия

$$k\Delta x = mg \Rightarrow \Delta x = \frac{mg}{k},$$

$$mg = 2\rho g h S \Rightarrow$$

$$h = \frac{m}{2\rho S},$$

где S – площадь поперечного сечения трубки.

В процессе установления равновесия груз опустился относительно начального положения на величину

$$\Delta h = \Delta x + h.$$

Начальная механическая энергия E_1 системы (относительно нижней точки трубки) складывается из потенциальной энергии столбов жидкости (центр масс на середине высоты) и груза

$$E_1 = 2\rho g \frac{l}{2} S \frac{l}{4} + mg\left(\frac{l}{2} + l_0\right)$$

где l_0 – длина пружины в недеформированном состоянии (т.е. до установки груза, в условии не задана).

Соответственно, после установления равновесия механическая энергия E_2 станет равна (добавится энергия упругой деформации пружины)

$$E_2 = \frac{\rho \mathrm{g} \left(\frac{l}{2} h\right)^2 s}{2} + \frac{\rho \mathrm{g} \left(\frac{l}{2} + h\right)^2 s}{2} + mg\left(\frac{l}{2} + l_0 - h - \Delta x\right) + \frac{k\Delta x^2}{2}.$$

Из закона сохранения энергии после установления нового положения равновесия имеем

$$Q = E_1 - E_2 = mgh + mg\Delta x - \rho g S h^2 - \frac{k\Delta x^2}{2}.$$

Видим, что подобные члены, содержащие длину недеформированной пружины l_0, успешно сокращаются.

Далее найдём

$$Q = mgh + mg\Delta x - \rho \mathrm{g} S h^2 - \frac{k\Delta x^2}{2} = \frac{m^2 g}{4\rho S} + \frac{m^2 g^2}{2k} = \frac{m^2 g}{2}\left(\frac{1}{2\rho S} + \frac{\mathrm{g}}{k}\right).$$

С физической точки зрения выделение теплоты в системе происходит из-за наличия диссипативных сил: при затухании со временем колебаний жидкости (узкая трубка, вязкое трение, жидкость не идеальна) и пружины (трение о воздух, работа силы сопротивления воздуха).

Расчёт по итоговой формуле даёт

$$Q = \frac{m^2 g}{2}\left(\frac{1}{2\rho S} + \frac{g}{k}\right) = 5{,}12 \text{ мДж}.$$

Ответ: 5,12.

Задача 3-2 *Жидкое равновесие*

В вертикальную U-образную трубку малого постоянного сечения $s = 9{,}00$ см^2 налита вода, общая длина которой в обоих коленах составляет $l = 60{,}0$ см. В одно колено трубки помещают два поршня, между которыми имеется пружина жесткости $k = 2{,}00$ Н/м. Поршни воду не пропускают и могут скользить по трубке без трения. В начальный момент на верхний поршень ставят груз массой $m = 15{,}0$ г. Определите количество теплоты, выделившееся в системе в ходе установления равновесия. Массой поршней и пружины можно пренебречь. Воду считайте идеальной несжимаемой жидкостью. Длиной горизонтального участка U-образной трубки можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2.

Ответ дайте в мДж с точностью до сотых.

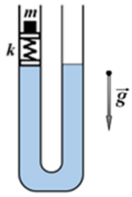


Рис. 6: К задаче 9-2

Ответ: 6,03.

Задача 4-1 *Дорогой уголок*

Два однородных прямых стержня AB и BC одинакового поперечного сечения, но из разных металлов, образуют жесткую конструкцию (прямой уголок) ABC общей массой $m = 160$ г. Уголок подвешивают на лёгкой гладкой нити AOC на тонкий гвоздик O, после чего конструкция занимает положение равновесия, изображённое на рисунке.

4.1. Используя квадратную масштабную сетку, найдите массы стержней m_{AB} и m_{BC}. Ответ дайте в граммах с точностью до целых.

4.2. Известно, что стержень AB изготовлен из титана ($\rho_1 = 4{,}3$ г/см^3). Какова плотность ρ_2 материала, из которого изготовлен стержень BC? Ответ дайте в г/см^3 с точностью до десятых.

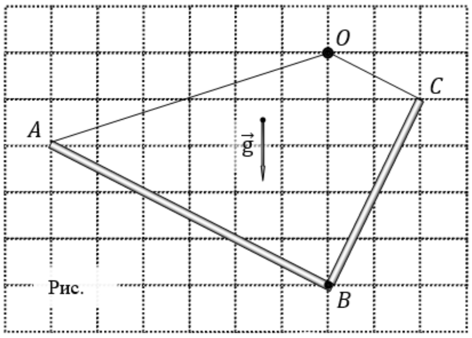


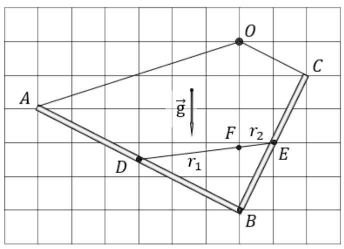
Рис. 7: К задаче 10-4

Решение

При свободном подвешивании некоторой жёсткой системы в поле тяжести она с течением времени примет такое положение равновесия, при котором её центр тяжести (масс) окажется на одной вертикали с точкой подвеса.

Это утверждение следует из правила моментов сил для положения равновесия, поскольку в противном случае моменты сил не будут уравновешены, и система будет вращаться.

Центр масс однородного стержня находится на его середине, следовательно, соединив середины стержней D и E на пересечении отрезка DE с вертикалью OB (Рис.) найдем центр масс системы - точку F.



Для центра масс системы двух материальных точек справедливо равенство (из правила моментов)

$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

где $r_1 = DF$, а $r_2 = FE$. Таким образом, для определения масс стержней получаем систему уравнений

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = m \\ m_1 r_1 = m_2 r_2 \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$\begin{cases} m_1 = \frac{r_2}{r_1+r_2} m \\ m_2 = \frac{r_1}{r_1+r_2} m \end{cases}$$

Из рис. по теореме Фалеса (по клеточкам) следует, что отношение

$$\frac{r_1}{r_2} = 3 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3r_2$$

Следовательно, для искомых масс получаем

$$\begin{cases} m_1 = \frac{m}{4} = 40 \text{ г} \\ m_2 = \frac{3}{4} m = 120 \text{ г} \end{cases}$$

Поскольку площади поперечного сечения стержней одинаковы, то их плотности можно найти как

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{m_1}{sl_1} \\ \rho_2 = \frac{m_2}{sl_2} \end{cases}$$

где $l_1 = AB$, а $l_2 = BC$. Из чертежа по теореме Пифагора находим, что $l_1 = \sqrt{45}a; l_2 = \sqrt{20}a$, где a - длина стороны квадратной масштабной сетки на Рис. 12.

Тогда можем записать соотношение для плотностей стержней AB и BC

$$\rho_2 = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{l_1}{l_2} \rho_1 = 3\sqrt{\frac{45}{20}} \rho_1 = 4{,}5\rho_1 = 19{,}4 \text{ г/см}^3$$

Ответ:

4.1) 40 и 120

4.2) 19,4

Задача 4-2 *Дорогой уголок*

Два однородных прямых стержня AB и BC одинакового поперечного сечения, но из разных металлов, образуют жесткую конструкцию (прямой уголок) ABC общей массой $m = 240$ г. Уголок подвешивают на лёгкой гладкой нити AOC на тонкий гвоздик O, после чего конструкция занимает положение равновесия, изображённое на рисунке.

4.1. Используя квадратную масштабную сетку, найдите массы стержней m_{AB} и m_{BC}. Ответ дайте в граммах с точностью до целых.

4.2. Известно, что стержень AB изготовлен из алюминия ($\rho_1 = 2{,}8$ г/см^3). Какова плотность ρ_2 материала, из которого изготовлен стержень BC? Ответ дайте в г/см^3 с точностью до десятых.

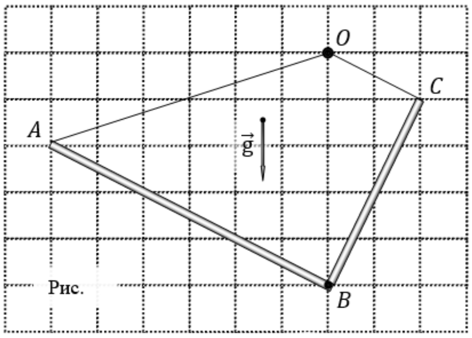


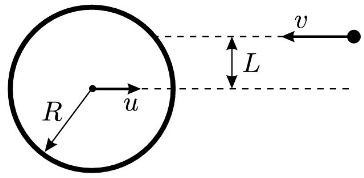
Рис. 8: К задаче 10-4

Ответ:

4.1) 60 и 180

4.2) 12,6

Задача 5-1 *Шайба и шайбочка*



Шайба радиусом $R = 7{,}62$ см и массой M, движущаяся со скоростью $u = 1$ м/с, налетает на маленькую шайбочку массой $m \ll M$, которая движется ей навстречу по параллельной траектории со скоростью $v = 5$ м/с. Прицельный параметр движения шайбочки равен $L = 3$ см. Движение происходит на гладком горизонтальном столе. Поверхности шайбы и шайбочки гладкие. Удар считайте абсолютно упругим.

Найдите скорость v' шайбочки после удара. Ответ дайте в м/с с точностью до сотых.

Примечание: Прицельным параметром называется расстояние между центром обруча и прямой, содержащей вектор начальной скорости шайбы.

Решение

Перейдём в систему отсчёта, связанную с движущимся шайбой. В ней перед ударом шайбочка движется со скоростью $\vec{v} + \vec{u}$.

Так как шайба гладкая и между ней и шайбочкой не действуют силы трения, то углы между нормалью к поверхности шайбы в месте удара и направлениями движения шайбочки до и после удара одинаковы. Следовательно, после удара о шайбу шайбочка в движущейся системе отсчёта будет двигаться с той же по модулю скоростью $\vec{v} + \vec{u}$ под углом $\beta = \pi - 2\alpha$ к направлению исходного движения, причём $\cos\alpha = L/R$.

Вернёмся обратно в неподвижную систему отсчёта, связанную с землёй. В ней скорость шайбочки после удара $\vec{v}_1$ будет представлять собой векторную сумму скорости $\vec{u}$ шайбы относительно земли и скорости $\vec{v} + \vec{u}$ шайбочки относительно шайбы. Используя теорему косинусов, получим:

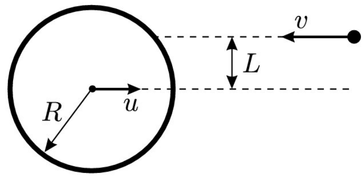
$$v_1^2 = u^2 + (v+u)^2 - 2u(v+u)\cos 2\alpha =$$
$$= v^2 + 2u^2(1 - \cos 2\alpha) + 2uv(1 - \cos 2\alpha) =$$
$$= v^2 + 2u(u+v)(1 - \cos 2\alpha) = v^2 + 4u(u+v)\left(1 - \cos^2\alpha\right)$$

С учётом выражения для $\cos\alpha$ окончательно получаем:

$$v_1 = \sqrt{v^2 + 4u(u+v)\left(1 - \frac{L^2}{R^2}\right)} = 6,73 \text{ м/с}.$$

Ответ: 6,73.

Задача 5-2 *Шайба и шайбочка*



Шайба радиусом $R = 7{,}62$ см и массой M, движущаяся со скоростью $u = 5$ м/с, налетает на маленькую шайбочку массой $m \ll M$, которая движется ей навстречу по параллельной траектории со скоростью $v = 1$ м/с. Прицельный параметр движения шайбочки равен $L = 2$ см. Движение происходит на гладком горизонтальном столе. Поверхности шайбы и шайбочки гладкие. Удар считайте абсолютно упругим.

Найдите скорость v' шайбочки после удара. Ответ дайте в м/с с точностью до сотых.

Примечание: Прицельным параметром называется расстояние между центром обруча и прямой, содержащей вектор начальной скорости шайбы.

Ответ: 10,62.