Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2025

Отборочный этап   10 февраля

8 и 9 классы

Задача 8.1 [вариант 1] Числа d и e являются корнями уравнения $x^2-bx+c=0$, причём все числа b, c, d, e натуральны. Известно, что $bcde = 5202$. Какое наибольшее значение может принимать число c?

Ответ: 17

Решение. По теореме Виета $de = c$, следовательно, $bc^2 = 5202$. Число c^2 является множителем $5202 = 2 \cdot 3^2 \cdot 17^2$, и значит, может быть квадратом только чисел 1, 3, 17, 51.

Значение 51 не подходит, так как в этом случае $b = 4$ и дискриминант уравнения $16 - 4 \cdot 51 < 0$.

Значение 17 подходит. В этом случае $b = 18$, корнями уравнения $x^2 - 18x + 17 = 0$ являются числа 1 и 17.

Задача 8.1 [вариант 2] Числа d и e являются корнями уравнения $x^2-bx+c=0$, причём все числа b, c, d, e натуральны. Известно, что $bcde = 52020$. Какое наибольшее значение может принимать число c?

Ответ: 51

Решение. По теореме Виета $de = c$, следовательно, $bc^2 = 52020$. Число c^2 является множителем $52020 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17^2$, и значит, может быть квадратом только чисел 1, 2, 3, 6, 17, 34, 51, 102.

Значение 102 не подходит, так как в этом случае $b = 5$ и дискриминант уравнения $25 - 4 \cdot 102 < 0$.

Значение 51 подходит. В этом случае $b = 20$, корнями уравнения $x^2 - 20x + 51 = 0$ являются числа 3 и 17.

Задача 8.1 [вариант 3] Числа d и e являются корнями уравнения $x^2-bx+c=0$, причём все числа b, c, d, e натуральны. Известно, что $bcde = 7220$. Какое наибольшее значение может принимать число c?

Ответ: 19

Решение. По теореме Виета $de = c$, следовательно, $bc^2 = 7220$. Число c^2 является множителем $7220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 19^2$, и значит, может быть квадратом только чисел 1, 2, 19, 38.

Значение 38 не подходит, так как в этом случае $b = 5$ и дискриминант уравнения $16 - 4 \cdot 38 < 0$.

Значение 19 подходит. В этом случае $b = 20$, корнями уравнения $x^2 - 20x + 19 = 0$ являются числа 1 и 19.

Задача 8.1 [вариант 4] Числа d и e являются корнями уравнения $x^2 - bx + c = 0$, причём все числа b, c, d, e натуральны. Известно, что $bcde = 25920$. Какое наибольшее значение может принимать число c?

Ответ: 36

Решение. По теореме Виета $de = c$, следовательно, $bc^2 = 25920$. Число c^2 является множителем $25920 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$, и значит, может быть квадратом только чисел 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72 (все делители $2^3 \cdot 3^2$).

Значение 72 не подходит, так как в этом случае $b = 5$ и дискриминант уравнения $25 - 4 \cdot 72 < 0$.

Значение 36 подходит. В этом случае $b = 20$, корнями уравнения $x^2 - 20x + 36 = 0$ являются числа 2 и 18.

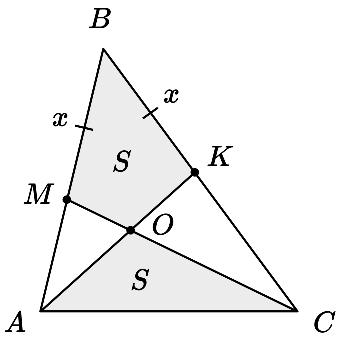
Задача 8.2 [вариант 1] На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли такие точки M и K, что $BM = BK$. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O, причём площади четырёхугольника $MBKO$ и треугольника AOC равны. Найдите BM, если стороны AB и BC равны 12 и 13.

Ответ: 6,24

Решение. Площади треугольников ABK и ACM равны, поэтому точки M и K делят свои стороны в одинаковых отношениях. Далее обозначаем искомый отрезок за x, выражаем $AM = 12 - x$, $CK = 13 - x$ и подставляем в отношение:

$$\frac{12 - x}{x} = \frac{x}{13 - x}$$

Откуда находим $x = \frac{156}{25} = 6{,}24$.



Задача 8.2 [вариант 2] На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли такие точки M и K, что $BM = BK$. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O, причём площади четырёхугольника $MBKO$ и треугольника AOC равны. Найдите BM, если стороны AB и BC равны 11 и 14.

Ответ: 6,16

Решение. Площади треугольников ABK и ACM равны, поэтому точки M и K делят свои стороны в одинаковых отношениях. Далее обозначаем искомый отрезок за x, выражаем $AM = 11-x$, $CK = 14-x$ и подставляем в отношение:

$$\frac{11-x}{x} = \frac{x}{14-x}$$

Откуда находим $x = \frac{154}{25} = 6{,}16$.

Задача 8.2 [вариант 3] На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли такие точки M и K, что $BM = BK$. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O, причём площади четырёхугольника $MBKO$ и треугольника AOC равны. Найдите BM, если стороны AB и BC равны 9 и 11.

Ответ: 4,95

Решение. Площади треугольников ABK и ACM равны, поэтому точки M и K делят свои стороны в одинаковых отношениях. Далее обозначаем искомый отрезок за x, выражаем $AM = 9-x$, $CK = 11-x$ и подставляем в отношение:

$$\frac{9-x}{x} = \frac{x}{11-x}$$

Откуда находим $x = \frac{99}{20} = 4{,}95$.

Задача 8.2 [вариант 4] На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли такие точки M и K, что $BM = BK$. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O, причём площади четырёхугольника $MBKO$ и треугольника AOC равны. Найдите BM, если стороны AB и BC равны 8 и 12.

Ответ: 4,8

Решение. Площади треугольников ABK и ACM равны, поэтому точки M и K делят свои стороны в одинаковых отношениях. Далее обозначаем искомый отрезок за x, выражаем $AM = 8-x$, $CK = 12-x$ и подставляем в отношение:

$$\frac{8-x}{x} = \frac{x}{12-x}$$

Откуда находим $x = \frac{96}{20} = 4{,}8$.

Задача 8.3 [вариант 1] На часах с циферблатом три стрелки с плавным ходом: часовая, минутная и секундная. Момент времени, когда положение двух или трёх стрелок совпадает назовём *счастливым.* Какое максимальное количество счастливых моментов может случиться на часах в 8-часовой промежуток (учитывая начальный и последний момент промежутка)?

Ответ: 961

Решение. Оценим количество совпадения между стрелками по отдельности.

Секундная стрелка с минутной совпадают друг с другом каждую минуту не более 1 раза, при этом, если изначально они начинают в разных положениях, то ровно за 1 час они могут совпасть 59 раз.

Секундная стрелка с часовой совпадают друг с другом каждую минуту также не более 1 раза.

Минутная стрелка с часовой совпадают друг с другом каждый час не более 1 раза.

Итого, за 8 часов у нас может случиться не более $8 \cdot 59 + 8 \cdot 60 + 8 = 960$ счастливых моментов, если никакие стрелки не совпадают в начале. Если же в начальный момент времени какие-то стрелки совпадают, то можно мысленно сдвинуть секундную стрелку на долю секунды назад и фактически оценка остается той же, если исключить последний момент времени, когда стрелки вновь совпадут ровно через 8 часов. Поскольку в условии сказано, что начальный и последний момент учитываются, то в промежутке, например, с 1:00 до 9:00 включительно будет на один счастливый момент больше, то есть $960 + 1 = 961$.

(Важно также учесть, что в нашем промежутке нет совпадений всех трех стрелок, поэтому все моменты совпадений между стрелками учитываются ровно один раз.)

Задача 8.3 [вариант 2] На часах с циферблатом три стрелки с плавным ходом: часовая, минутная и секундная. Момент времени, когда положение двух или трёх стрелок совпадает назовём *счастливым*. Какое максимальное количество счастливых моментов может случиться на часах в 7-часовой промежуток (учитывая начальный и последний момент промежутка)?

Ответ: 841

Задача 8.3 [вариант 3] На часах с циферблатом три стрелки с плавным ходом: часовая, минутная и секундная. Момент времени, когда положение двух или трёх стрелок совпадает назовём *счастливым*. Какое максимальное количество счастливых моментов может случиться на часах в 9-часовой промежуток (учитывая начальный и последний момент промежутка)?

Ответ: 1081

Задача 8.3 [вариант 4] На часах с циферблатом три стрелки с плавным ходом: часовая, минутная и секундная. Момент времени, когда положение двух или трёх стрелок совпадает назовём *счастливым*. Какое максимальное количество счастливых моментов может случиться на часах в 10-часовой промежуток (учитывая начальный и последний момент промежутка)?

Ответ: 1201

Задача 8.4 [вариант 1] На доске записано пятизначное число. Петя стёр его первую и последнюю цифры, и число уменьшилось ровно в 46 раз. Какое число было записано изначально?

Ответ: 12788

Решение. Пусть изначальное число $\overline{abcde}$. Тогда

$$\overline{abcde} = 46 \cdot \overline{bcd}$$

$$a \cdot 10^4 + 10 \cdot \overline{bcd} + e = 46 \cdot \overline{bcd}$$

$$a \cdot 10^4 + e = 36 \cdot \overline{bcd}$$

Левая часть должна делиться на 4 и на 9. Так как 10^4 кратно 4, то e тоже кратно 4, следовательно, $e = 0, 4$ или 8. Левая часть ограничена правой частью значением 36000, следовательно, цифра $a = 1, 2$ или 3. С другой стороны, при делении на 9 число 10^4 дает остаток 1, значит для того, чтобы левая часть делилась на 9, подходит только $a = 1$ и $e = 8$. Подставляя $10008 = 36 \cdot \overline{bcd}$ находим остальную часть $\overline{bcd} = 278$.

Задача 8.4 [вариант 2] На доске записано пятизначное число. Петя стёр его первую и последнюю цифры, и число уменьшилось ровно в 55 раз. Какое число было записано изначально?

Ответ: 48895

Решение. Пусть изначальное число $\overline{abcde}$. Тогда

$$\overline{abcde} = 55 \cdot \overline{bcd}$$

$$a \cdot 10^4 + 10 \cdot \overline{bcd} + e = 55 \cdot \overline{bcd}$$

$$a \cdot 10^4 + e = 45 \cdot \overline{bcd}$$

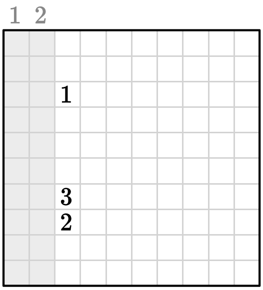
Левая часть должна делиться на 5 и на 9. Понятно, что e тоже кратно 5, следовательно, $e = 0,$ или 5. С другой стороны, при делении на 9 число 10^4 дает остаток 1, значит для того, чтобы левая часть делилась на 9, подходит только $a = 4$ и $e = 5$. Подставляя $40005 = 45 \cdot \overline{bcd}$ находим остальную часть $\overline{bcd} = 889$.

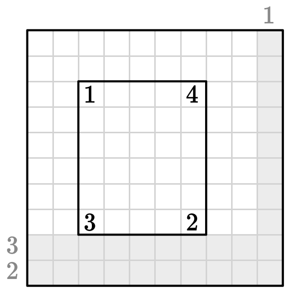
Задача 8.5 [вариант 1] Аня и Боря играют в игру на клетчатом поле 8×8. За один ход Аня ставит точку в одну из свободных клеток. Боря за свой ход может сократить размеры поля с любого края, вычеркнув столбец или строку, если там находится не более 2 точек (которые ещё не были вычеркнуты). Игроки ходят по очереди, начинает Аня. Игра заканчивается, когда Боря не может сделать ход. Какое наибольшее количество клеток может остаться на поле (при любой стратегии Бори)?

Ответ: 12

Решение. Нетрудно показать, что если Аня ставит точку в клетку в пустом ряду, который находится на границе или на расстоянии одной клетки от края текущих границ поля, то можно всегда выстроить стратегию Бори так, чтобы этот ряд вычеркнуть.

Тогда при правильной стратегии чтобы сохранить наибольшее количество клеток доски, первую точку Аня должна поставить в пределах квадрата 4×4 (это клетки, находящиеся на расстоянии не менее двух клеток от всех краёв). Однако, первым же своим ходом Боря может сократить поле с дальнего от первой точки Ани края, и тогда область действия стратегии Ани сокращается до прямоугольника 3×4, которую Аня уже сможет сохранить до конца игры, если в первые два хода зафиксирует точки в его противоположных углах. То есть может остаться максимум 12 клеток.





Задача 8.5 [вариант 2] Аня и Боря играют в игру на клетчатом поле 9×9. За один ход Аня ставит точку в одну из свободных клеток. Боря за свой ход может сократить размеры поля с любого края, вычеркнув столбец или строку, если там находится не более 2 точек (которые ещё не были вычеркнуты). Игроки ходят по очереди, начинает Аня. Игра заканчивается, когда Боря не может

сделать ход. Какое наибольшее количество клеток может остаться на поле?

Ответ: 20

> ***Решение.*** То же решение, что и в варианте 1, только Аня фиксирует прямоугольник 4×5. Наибольшее количество клеток, которое может остаться на может остаться на поле при любой стратегии Бори — 20 клеток.

Задача 8.5 [вариант 3] Аня и Боря играют в игру на клетчатом поле 10×10. За один ход Аня ставит точку в одну из свободных клеток. Боря за свой ход может сократить размеры поля с любого края, вычеркнув столбец или строку, если там находится не более 2 точек (которые ещё не были вычеркнуты). Игроки ходят по очереди, начинает Аня. Игра заканчивается, когда Боря не может сделать ход. Какое наибольшее количество клеток может остаться на поле?

Ответ: 30

> ***Решение.*** То же решение, что и в варианте 1, только Аня фиксирует прямоугольник 5×6. Наибольшее количество клеток, которое может остаться на может остаться на поле при любой стратегии Бори — 30 клеток.

Задача 8.5 [вариант 4] Аня и Боря играют в игру на клетчатом поле 11×11. За один ход Аня ставит точку в одну из свободных клеток. Боря за свой ход может сократить размеры поля с любого края, вычеркнув столбец или строку, если там находится не более 2 точек (которые ещё не были вычеркнуты). Игроки ходят по очереди, начинает Аня. Игра заканчивается, когда Боря не может сделать ход. Какое наибольшее количество клеток может остаться на поле?

Ответ: 42

> ***Решение.*** То же решение, что и в варианте 1, только Аня фиксирует прямоугольник 6×7. Наибольшее количество клеток, которое может остаться на может остаться на поле при любой стратегии Бори — 42 клеток.

Задача 8.6 [вариант 1] Назовем *драконом* такую фигуру из $n \geqslant 2025$ клеток, что от любой клетки можно дойти до любой другой, двигаясь по клеткам фигуры. Скажем, что дракон является *маленьким*, если его нельзя разделить на двух или более драконов. Найдите наибольшее возможное количество клеток у маленького дракона.

Ответ: 8097

Решение. Заменяя для удобства число 2025 на букву N, докажем, что ответом в задаче будет число $4N-3$. Пример такой фигуры доставляет крест: центральная клетка и четыре полоски длины $N-1$, которые к ней приклеены.

Докажем индукцией по N, что дракон D размера $4N-2$ не является маленьким. База $N=1$ очевидна: две соседние клетки разбиваются на два дракона, в каждом из которых одна клетка.

Докажем переход. Возьмем дракона D размера $4N-2$. По предположению индукции его можно разбить на две части A и B, каждая из которых содержит хотя бы $N-1$ клетку. Если эти части на самом деле содержат хотя бы N клеток, все доказано. Предположим, что часть A содержит ровно $N-1$ клетку (две части содержать $N-1$ клетку не могут, иначе в драконе было бы $2N-2 < 4N-2$ клетки). Рассмотрим клетку K части B, которая граничит с A (такая есть в силу связности дракона D). Уберем ее из части B. В результате она распадется на не более чем три куска, в которых суммарно будет $(4N-2)-(N-1)-1=3N-2$ клеток. Значит, в одном из кусков будет не менее N клеток. Обозначим этот кусок через D_1, а все остальные клетки — через D_2. Легко видеть, что разбиение $D=D_1 \cup D_2$ является искомым.

Задача 8.6 [вариант 2] Назовём *драконом* такую фигуру из $n \geqslant 2035$ клеток, что от любой клетки можно дойти до любой другой, двигаясь по клеткам фигуры. Скажем, что дракон является *маленьким*, если его нельзя разделить на двух или более драконов. Найдите наибольшее возможное количество клеток у маленького дракона.

Ответ: 8137

Задача 8.6 [вариант 3] Назовём *драконом* такую фигуру из $n \geqslant 2045$ клеток, что от любой клетки можно дойти до любой другой, двигаясь по клеткам фигуры. Скажем, что дракон является *маленьким*, если его нельзя разделить на двух или более драконов. Найдите наибольшее возможное количество клеток у маленького дракона.

Ответ: 8177

Задача 8.6 [вариант 4] Назовём *драконом* такую фигуру из $n \geqslant 2055$ клеток, что от любой клетки можно дойти до любой другой, двигаясь по клеткам фигуры. Скажем, что дракон является *маленьким*, если его нельзя разделить на двух или более драконов. Найдите наибольшее возможное количество клеток у маленького дракона.

Ответ: 8217