Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2025

Отборочный этап 10 февраля

10 и 11 классы

Задача 10.1 [вариант 1] Первый бегун преодолел некоторую отметку марафонской дистанции и продолжил бежать с постоянной скоростью. Каждую следующую минуту эту же отметку преодолевает ещё один бегун и бежит вдогонку за остальными со скоростью на 100 м/час больше, чем скорость предыдущего. Какой по счёту бегун будет возглавлять процессию через 2 часа, если скорость первого бегуна равна 9 км/час?

Ответ: 16

Решение. Пусть скорость первого бегуна v м/мин, а скорость каждого следующего на u м/мин больше. Тогда скорость n-го бегуна $v+u\cdot(n-1)$, а бежать он будет $120-(n-1)$ минут. Впереди будет тот бегун, кто через 2 часа окажется дальше всего от изначальной отметки. То есть тот, для кого значение выражения наибольшее:

$$(120-(n-1))(v+u\cdot(n-1))$$

Преобразуем и делаем замену $t=n-1$ и получаем

$$-ut^2+(120u-v)t+120v$$

Это парабола, ветви которой направлены вниз. Соответственно максимум достигается в ее вершине $t=60-\frac{v}{2u}$. Подставляя $v=150$ и $u=\frac{100}{60}$ получаем $t=15$, то есть $n-1=15$. Значит, $n=16$.

Задача 10.1 [вариант 2] Первый бегун преодолел некоторую отметку марафонской дистанции и продолжил бежать с постоянной скоростью. Каждую следующую минуту эту же отметку преодолевает ещё один бегун и бежит вдогонку за остальными со скоростью на 125 м/час больше, чем скорость предыдущего. Какой по счёту бегун будет возглавлять процессию через 2 часа, если скорость первого бегуна равна 9 км/час?

Ответ: 25

Решение. Пусть скорость первого бегуна v м/мин, а скорость каждого следующего на u м/мин больше. Тогда скорость n-го бегуна $v+u\cdot(n-1)$, а бежать он будет $120 - (n - 1)$ минут. Впереди будет тот бегун, кто через 2 часа окажется дальше всего от изначальной отметки. То есть тот, для кого значение выражения наибольшее:

$$(120 - (n - 1))(v + u \cdot (n - 1))$$

Преобразуем и делаем замену $t = n - 1$ и получаем

$$-ut^2 + (120u - v)t + 120v$$

Это парабола, ветви которой направлены вниз. Соответственно максимум достигается в ее вершине $t = 60 - \frac{v}{2u}$. Подставляя $v = 150$ и $u = \frac{125}{60}$ получаем $t = 24$, то есть $n - 1 = 24$. Значит, $n = 25$.

Задача 10.1 [вариант 3] Первый бегун преодолел некоторую отметку марафонской дистанции и продолжил бежать с постоянной скоростью. Каждую следующую минуту эту же отметку преодолевает ещё один бегун и бежит вдогонку за остальными со скоростью на 75 м/час больше, чем скорость предыдущего. Какой по счёту бегун будет возглавлять процессию через 2 часа, если скорость первого бегуна равна 9 км/час?

Ответ: 1

Задача 10.1 [вариант 4] Первый бегун преодолел некоторую отметку марафонской дистанции и продолжил бежать с постоянной скоростью. Каждую следующую минуту эту же отметку преодолевает ещё один бегун и бежит вдогонку за остальными со скоростью на 50 м/час больше, чем скорость предыдущего. Какой по счёту бегун будет возглавлять процессию через 2 часа, если скорость первого бегуна равна 9 км/час?

Ответ: 1

Задача 10.2 [вариант 1] Назовем *драконом* такую фигуру из $n \geqslant 2025$ единичных кубиков, что от любого кубика можно дойти до любого другого, двигаясь по кубикам фигуры (соседние кубики должны соприкасаться всей своей гранью). Скажем, что дракон является *маленьким*, если его нельзя разделить на двух или более драконов. Найдите наибольшее возможное количество кубиков у маленького дракона.

Ответ: 12145

Решение. Заменяя для удобства число 2025 на букву N, докажем, что ответом в задаче будет число $6N-5$. Пример такой фигуры доставляет крест: центральный кубик и шесть полосок длины $N-1$, которые к ней приклеены.

Докажем индукцией по N, что дракон D размера $6N-4$ не является маленьким. База $N=1$ очевидна: два соседних кубика разбиваются на два дракона, в каждом из которых один кубик.

Докажем переход. Возьмем дракона D размера $6N-4$. По предположению индукции его можно разбить на две части A и B, каждая из которых содержит хотя бы $N-1$ кубик. Если эти части на самом деле содержат хотя бы N кубиков, все доказано. Предположим, что часть A содержит ровно $N-1$ кубик (обе части содержать $N-1$ кубик не могут, иначе в драконе было бы $2N-2<6N-4$ кубиков). Рассмотрим кубик K части B, который граничит с A (такой есть в силу связности дракона D). Уберем его из части B. В результате он распадется на не более чем пять кусков, в которых суммарно будет $(6N-4)-(N-1)-1=5N-4$ кубиков. Значит, в одном из кусков будет не менее N кубиков. Обозначим этот кусок через D_1, а все остальные кубики — через D_2. Легко видеть, что разбиение $D=D_1\cup D_2$ является искомым.

Задача 10.2 [вариант 2] Назовем *драконом* такую фигуру из $n \geqslant 2035$ единичных кубиков, что от любого кубика можно дойти до любого другого, двигаясь по кубикам фигуры (соседние кубики должны соприкасаться всей своей гранью). Скажем, что дракон является *маленьким*, если его нельзя разделить на двух или более драконов. Найдите наибольшее возможное количество кубиков у маленького дракона.

Ответ: 12205

Задача 10.2 [вариант 3] Назовем *драконом* такую фигуру из $n \geqslant 2045$ единичных кубиков, что от любого кубика можно дойти до любого другого, двигаясь по кубикам фигуры (соседние кубики должны соприкасаться всей своей гранью). Скажем, что дракон является *маленьким*, если его нельзя разделить на двух или более драконов. Найдите наибольшее возможное количество кубиков у маленького дракона.

Ответ: 12265

Задача 10.2 [вариант 4] Назовем *драконом* такую фигуру из $n \geqslant 2055$ единичных кубиков, что от любого кубика можно дойти до любого другого, двигаясь по кубикам фигуры (соседние кубики должны соприкасаться всей своей гранью). Скажем, что дракон является *маленьким*, если его нельзя разделить на двух или более драконов. Найдите наибольшее возможное количество кубиков у маленького дракона.

Ответ: 12325

Задача 10.3 [вариант 1] Ваня строит график гиперболы $y = \frac{k}{x}$ и хочет, чтобы график прошёл как минимум через 75 точек с целочисленными координатами. При каком наименьшем положительном значении k ему удастся построить такой график?

Ответ: 1680

Решение. График гиперболы симметричен и состоит из двух ветвей с одинаковым количеством целых точек. Значит, на одной ветви гиперболы должно находиться как минимум $75 : 2 = 38$ точек с целыми координатами. Целочисленность координат точки $(a; \frac{k}{a})$ означает, что a является целым делителем коэффициента k. Значит, количество целых точек равно количеству всех целых делителей числа k.

Разложим число k на простые множители $k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$.

Тогда количество всех делителей можно вычислить как $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_m + 1)$, что не должно быть меньше 38.

Достаточно рассмотреть делители 2, 3, 5, 7. Далее аккуратно рассматриваем степени и приходим к наименьшему числу $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1680$.

Задача 10.3 [вариант 2] Ваня строит график гиперболы $y = \frac{k}{x}$ и хочет, чтобы график прошёл как минимум через 70 точек с целочисленными координатами. При каком наименьшем значении k ему удастся построить такой график?

Ответ: 1260

Задача 10.3 [вариант 3] Ваня строит график гиперболы $y = \frac{k}{x}$ и хочет, чтобы график прошёл как минимум через 85 точек с целочисленными координатами. При каком наименьшем значении k ему удастся построить такой график?

Ответ: 2520

Задача 10.3 [вариант 4] Ваня строит график гиперболы $y = \frac{k}{x}$ и хочет, чтобы график прошёл как минимум через 100 точек с целочисленными координатами. При каком наименьшем значении k ему удастся построить такой график?

Ответ: 5040

Задача 10.4 [вариант 1] В сундуке нашлись 10 монет, причём все монеты весят разное целое число грамм. Известно, что если положить на две чаши весов по две монеты, то тяжелее всегда окажется та чаша, где лежит наиболее тяжелая монета. Какой наименьший возможный вес мог быть у самой тяжелой монеты в сундуке?

Ответ: 89 грамм

Решение. Упорядочим монеты по возрастанию их весов: $m_1 < m_2 < \ldots < m_{10}$. Положим минимальный вес монеты $m_1 = m$. Тогда $m \geqslant 1, m_2 \geqslant m+1, m_3 \geqslant m+2$. Далее для каждой следующей монеты m_k проведём следующее взвешивание. Положим на одну чашу весов монеты m_k и m_1, а на другую m_{k-1} и m_{k-2}. Тогда

$$(m_k - m) > (m_{k-1} - m) + (m_{k-2} - m).$$

Для того, чтобы вес самой тяжелой монеты был наименьшим, необходимо, чтобы $m = 1, m_2 = 2, m_3 = 3$ и при $k \geqslant 4$ выполнялось условие $(m_k - 1) = (m_{k-1} - 1) + (m_{k-2} - 1) + 1$, то есть $m_k = m_{k-1} + m_{k-2}$. Вычисляя последовательно, получаем веса монет:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89.$$

Задача 10.4 [вариант 2] В сундуке нашлись 9 монет, причём все монеты весят разное целое число грамм. Известно, что если положить на две чаши весов по две монеты, то тяжелее всегда окажется та чаша, где лежит наиболее тяжелая монета. Какой наименьший возможный вес мог быть у самой тяжелой монеты в сундуке?

Ответ: 55 грамм

Задача 10.4 [вариант 3] В сундуке нашлись 8 монет, причём все монеты весят разное целое число грамм. Известно, что если положить на две чаши весов по две монеты, то тяжелее всегда окажется та чаша, где лежит наиболее тяжелая монета. Какой наименьший возможный вес мог быть у самой тяжелой монеты в сундуке?

Ответ: 34 грамма

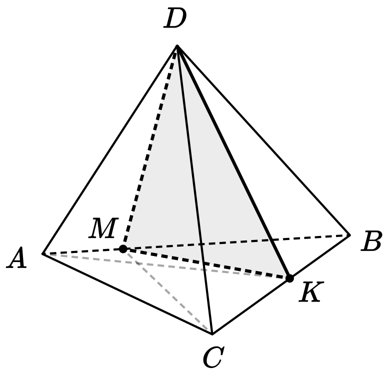
Задача 10.4 [вариант 4] В сундуке нашлись 11 монет, причём все монеты весят разное целое число грамм. Известно, что если положить на две чаши весов по две монеты, то тяжелее всегда окажется та чаша, где лежит наиболее тяжелая монета. Какой наименьший возможный вес мог быть у самой тяжелой монеты в сундуке?

Ответ: 144 грамма

Задача 10.5 [вариант 1] На сторонах AB и BC правильного треугольника ABC взяли точки M и K. Из отрезков MK, AK и CM составили треугольник. Чему равна наименьшая площадь этого треугольника, если $AC = 3$ и $MK = \sqrt{6}$?

Ответ: 3

Решение. Построим правильный тетраэдр $ABCD$ с гранью в виде данного треугольника ABC. Тогда треугольник, составленный из отрезков MK, AK и CM будет равен треугольнику в сечении DMK. Наименьшую площадь такое сечение имеет тогда, когда отрезок MK проходит через основание высоты тетраэдра, то есть через центр треугольника ABC. Высота тетраэдра вычисляется как $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 3$. Откуда находим искомую площадь.



Задача 10.5 [вариант 2] На сторонах AB и BC правильного треугольника ABC взяли точки M и K. Из отрезков MK, AK и CK составили треугольник. Чему равна наименьшая площадь этого треугольника, если $AC = 6$ и $MK = 2\sqrt{6}$?

Ответ: 12

Задача 10.5 [вариант 3] На сторонах AB и BC правильного треугольника ABC взяли точки M и K. Из отрезков MK, AK и CK составили треугольник. Чему равна наименьшая площадь этого треугольника, если $AC = 9$ и $MK = 3\sqrt{6}$?

Ответ: 27

Задача 10.5 [вариант 4] На сторонах AB и BC правильного треугольника ABC взяли точки M и K. Из отрезков MK, AK и CK составили треугольник. Чему равна наименьшая площадь этого треугольника, если $AC = 12$ и $MK = 4\sqrt{6}$?

Ответ: 48

Задача 10.6 [вариант 1] Робот Вася может выполнять три команды: “поверни налево на 90°”, “поверни направо на 90°” и “пройди вперед 1 м”. Территорию какой максимальной площади может окружить робот Вася, если использовано ровно 40 поворотов и 80 движений вперед, при этом робот не поворачивался два раза подряд и вернулся в исходную точку без пересечения своего пути?

Ответ: 350 м^2

Решение. Аккуратно обосновываем, что:

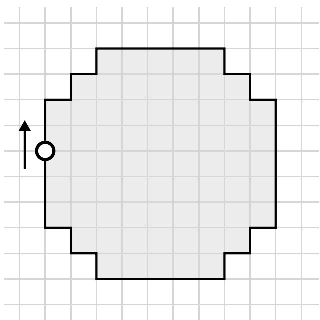
1. Если область невыпуклая, то её всегда можно свести к выпуклой, не увеличивая количество использованных поворотов и движений вперед. Поэтому рассматриваем выпуклые области.

2. Периметр выпуклой области равен периметру ограничивающего прямоугольника, и его площадь максимальна, когда это квадрат со стороной 20.

3. Постепенно увеличиваем область, не меняя количество поворотов и движений вперёд и приходим к виду области, где от прямоугольника или квадрата могут быть отрезаны углы “лесенкой”. Далее находим размеры этих лесенок, чтобы площадь оставалась максимальной.

Максимальная площадь в задаче равна максимальной площади прямоугольника с периметром 80 (это квадрат со стороной 20 площадью 400) минус четыре угла лесенечного типа минимально возможного размера (это лесенки размеров 4, 4, 5, 5 соответственно по площади 10, 10, 15, 15).

Итого: $400 - (10 + 10 + 15 + 15) = 350$.



Задача 10.6 [вариант 2] Робот Вася может выполнять три команды: “поверни налево на 90°”, “поверни направо на 90°” и “пройди вперед 1 м”. Территорию какой максимальной площади может окружить робот Вася, если использовано

ровно 30 поворотов и 80 движений вперед, при этом робот не поворачивался два раза подряд и вернулся в исходную точку без пересечения своего пути?

Ответ: 372 м^2

Задача 10.6 [вариант 3] Робот Вася может выполнять три команды: “поверни налево на 90°”, “поверни направо на 90°” и “пройди вперед 1 м”. Территорию какой максимальной площади может окружить робот Вася, если использовано ровно 50 поворотов и 80 движений вперед, при этом робот не поворачивался два раза подряд и вернулся в исходную точку без пересечения своего пути?

Ответ: 322 м^2

Задача 10.6 [вариант 4] Робот Вася может выполнять три команды: “поверни налево на 90°”, “поверни направо на 90°” и “пройди вперед 1 м”. Территорию какой максимальной площади может окружить робот Вася, если использовано ровно 60 поворотов и 80 движений вперед, при этом робот не поворачивался два раза подряд и вернулся в исходную точку без пересечения своего пути?

Ответ: 288 м^2