Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2025

Заключительный этап 23 марта 11 класс

Задача 1.

Дан прямоугольный треугольник с натуральными длинами сторон. Пусть α — его острый угол, а угол β таков, что $\operatorname{tg} 2\beta = \operatorname{tg} 3\alpha$. Докажите, что величина $\operatorname{tg} \beta$ рациональна.

Задача 2.

В некоторой школе все ребята увлекаются геометрией и состоят в различных геометрических клубах. Известно, что у любых двух клубов есть хотя бы один общий член. Докажите, что можно раздать школьникам циркули и линейки таким образом, чтобы у одного человека были и циркуль, и линейка, у каждого из остальных были или циркуль, или линейка (но не оба инструмента сразу), и в каждом клубе у его членов нашлись бы и циркуль, и линейка.

Задача 3.

Высоты BE и DK параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке H.

а) Докажите, что прямые CH и KE перпендикулярны;

б) Найдите длину диагонали BD, если $KE = 3$, $CH = 3{,}2$.

Задача 4.

Пусть $a_n = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \ldots + [\sqrt{n}]$. Докажите, что среди элементов

последовательности a_1, a_2, ... есть лишь конечное количество простых чисел, и найдите наибольшее из них.

Задача 5.

Дана клетчатая доска 6×6. Фигура *принц* умеет ходить по горизонтали и вертикали, делая ходы сначала на 1 клетку, потом — на две (в одном направлении), потом опять на одну и т.д. Может ли принц, встав на некоторую клетку, обойти все остальные клетки доски, побывав на каждой ровно по одному разу?

Задача 6.

Найдите все тройки вещественных чисел x, y, z, для которых справедливо равенство множеств:

$$\{x, y, z\} = \left\{\frac{x-y}{y-z}, \frac{y-z}{z-x}, \frac{z-x}{x-y}\right\}.$$