

Задача 1.

Пусть $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Рассматриваются два множества $A = \{p(2), p(3), \dots, p(2024)\}$ и $B = \{p(2) - 1, p(3) - 1, \dots, p(2024) - 1\}$. В каком из этих множеств квадратов целых чисел больше?

Задача 2.

Имеется таблица 4×4 , в каждой клетке которой стоит 0 или 1. Каждую минуту с ней проделывается следующая операция: для каждой клетки считается сумма чисел в соседних с ней по сторонам клетках и одновременно в каждой клетке число заменяется на 0, если соответствующая сумма четна, и на 1 — если нет.

Докажите, что в течение 6 минут какая-нибудь расстановка повторится дважды.

Задача 3.

Дан ромб $ABCD$, в который вписана окружность. Точки P и Q выбраны на сторонах AB и AD таким образом, что отрезок PQ касается окружности.

- Докажите, что площадь треугольника CPQ не зависит от выбора отрезка PQ .
- Найдите эту площадь, если известна сторона a ромба и его острый угол α .

Задача 4.

Найдите все натуральные числа, представимые в виде $[a, b] + [b, c] + [c, a]$ для некоторых натуральных a , b и c (здесь $[x, y]$ — наименьшее общее кратное чисел x и y).

Задача 5.

Найдите количество перестановок $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$ набора чисел $(1, 2, \dots, 10)$, таких, что $a_1 \leq 2a_2 \leq \dots \leq 10a_{10}$.