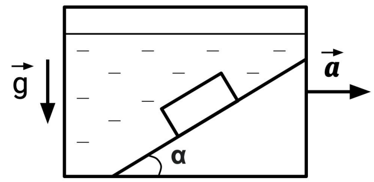
Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2025

Финальный этап 9 класс

Задача 1. В аквариуме с водой закреплена гладкая наклонная плоскость, наклонённая к горизонту под углом $\alpha = 30°$. На ней находится полностью погружённый брусок массой m и плотностью $\rho' = 1200$ кг/м³. Аквариум разгоняется горизонтально с ускорением a. Коэффициент трения между бруском и плоскостью $\mu = 0,3$. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³. Найдите минимальное ускорение a, при котором брусок не скользит вниз.



Возможное решение

Существует горизонтальная составляющая силы Архимеда, так как в ускоряющемся сосуде поверхность жидкости наклоняется, изменяя направление результирующей выталкивающей силы.

Обозначим:
$\vec{F_{\text{A},x}} = \rho V \vec{a}$ — горизонтальная составляющая силы Архимеда;
$\vec{F_{\text{A},y}} = -\rho V \vec{g}$ — вертикальная составляющая силы Архимеда.
В соответствии со вторым законом Ньютона:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}.$$

Спроецируем данное соотношение на оси, направленные вдоль наклонной плоскости и перпендикулярно ей:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_{\text{A},y}\sin\alpha - F_{\text{тр}} + F_{\text{A},x}\cos\alpha = -ma\cos\alpha, \\ N - mg\cos\alpha + F_{\text{A},y}\cos\alpha - F_{\text{A},x}\sin\alpha = -ma\sin\alpha. \end{cases}$$

Выразим силу реакции опоры:

$$N = V\left[(\rho' - \rho)g\cos\alpha - (\rho' - \rho)a\sin\alpha\right].$$

Выразим силу трения:

$$F_{\text{тр}} = V\left[(\rho' - \rho)g\sin\alpha + (\rho' - \rho)a\cos\alpha\right].$$

Скольжение начинается в момент, когда сила трения покоя переходит в силу трения скольжения. Запишем неравенство для силы трения покоя:

$$F_{\text{тр}} \le \mu N \quad \to \quad V\left[(\rho' - \rho)g\sin\alpha + (\rho' - \rho)a\cos\alpha\right] \le \mu V\left[(\rho' - \rho)g\cos\alpha - (\rho' - \rho)a\sin\alpha\right].$$

Получаем неравенство для a:

$$a \le \frac{g(-\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Подстановка численных данных дает нам отрицательное значение ускорения, что означает, что для реализации описанной в условии ситуации необходимо ускорять сосуд в противоположном направлении с ускорением:

$$a \ge \frac{9,8(\sin 30° - 0,3\cos 30°)}{\cos 30° + 0,3\sin 30°}.$$

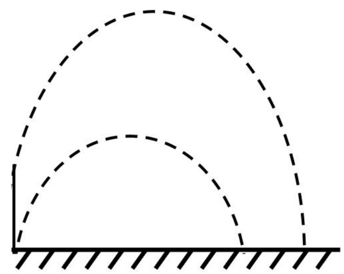
Ответ:

$$a_{\min} \approx 2,3 \text{ м/с}^2$$

Критерии

1. Отмечено существование горизонтальной составляющей силы Архимеда, действующей на брусок (+ 2 балла).
2. Верно записано уравнение движения бруска в проекции на выбранные оси (+ 4 балла).
3. Получено верное выражение и численное значение для граничного ускорения акуариума (+ 4 балла).

Задача 2. Садовая поливалка разбрызгивает капли на 360° в разные стороны. Найдите, во сколько раз вырастет площадь полива, когда поливалку поднимают с уровня земли на высоту $H = 50$ см. Все капли вылетают из поливалки с постоянной скоростью $v = 5$ м/с, сопротивлением воздуха пренебречь.

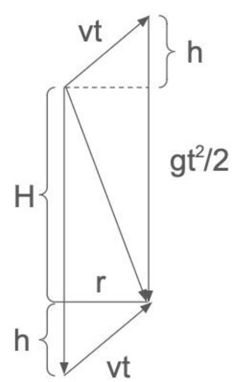


Возможное решение

Рассмотрим вектор перемещения капли $\vec{l}$. Зависимость перемещения капли от времени дается выражением:

$$\vec{l} = \vec{v}t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$$

Рассмотрим горизонтальную составляющую перемещения капли к моменту ее падения на землю. Площадь полива зависит



от неё квадратично. Из векторной диаграммы получим $\frac{gt^2}{2} = H + h$, тогда:

$$r^2 = (vt)^2 - h^2 = v^2\frac{2(H+h)}{g} - h^2 = -h^2 + \frac{2v^2}{g}h + \frac{2v^2H}{g}$$

Данное уравнение представляет собой параболу ветвями вниз с вершиной в точке $(\frac{v^2}{g}, \frac{2v^2H}{g} + \frac{v^4}{g^2})$, где

$$r_{max}^2 = \frac{2v^2H}{g} + \frac{v^4}{g^2}$$

Поскольку начальному случаю $H = 0$ отвечает $r_0 = \frac{v^2}{g}$, найдем искомое отношение:

$$\frac{r_{max}^2}{r_0^2} = 1 + \frac{2gH}{v^2} = 1,4$$

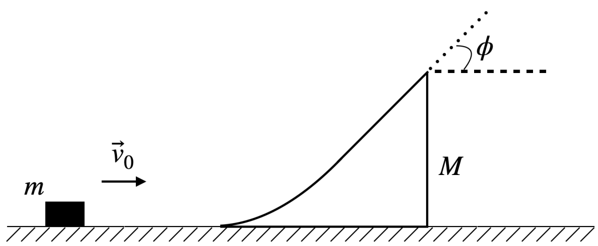
Ответ:

$$S_2/S_1 = 1,4$$

Критерии

1. Рассмотрена векторная диаграмма перемещения капли (+ 2 балла).
2. Получено верное уравнение для горизонтального смещения капли (+ 2 балла).
3. Найдена максимальное значение горизонтального смещения капли (+ 2 балла).
4. Получен верный формульный и числовой ответ (+ 4 балла).

Задача 3. На гладком горизонтальном столе шайба массы m движется со скоростью v_0. На её пути расположен клин массы $M = 11m$, который также может двигаться по столу без трения. Наклонная поверхность клина имеет начальный покатый участок, плавно переходящий в участок с постоянным наклоном к горизонтальной поверхности $\phi = 60°$. Наклонная часть поверхности клина имеет шероховатости. После прохождения наклонного участка шайба вылетает с верхнего края клина. Найдите, какая доля начальной кинетической энергии шайбы переходит в тепловую энергию в результате трения, если скорость шайбы в момент вылета с клина в системе отсчета движущегося клина в два раза меньше начальной скорости шайбы в системе отсчета стола. Высота клина такова, что если сбросить с такой высоты шайбу, скорость ее в момент удара о поверхность окажется равной $0{,}4 \cdot v_0$. Ответ представьте в виде дроби.



Возможное решение

Пусть в системе клина скорость шайбы убывает до

$$\alpha v_0, \quad \alpha = \tfrac{1}{2}, \quad \phi = 60°.$$

Тогда горизонтальная компонента её скорости в системе клина $\alpha v_0 \cos\phi$, а в лабораторной системе (где клин движется со скоростью V) она равна

$$u_x = \alpha v_0 \cos\phi + V.$$

Начальный импульс системы по горизонтали:

$$p_{\text{нач}} = m v_0.$$

В момент вылета шайбы суммарный горизонтальный импульс равен

$$m v_0 = m\big(\alpha v_0 \cos\phi + V\big) + (11\,m)\,V.$$

Отсюда

$$m v_0 = m\,\alpha\, v_0 \cos\phi + 12\,m\,V \quad \Longrightarrow \quad 12\,m\,V = m\,v_0\,\big[1 - \alpha\cos\phi\big].$$

Значит,

$$V = \frac{v_0\,(1 - \alpha\cos\phi)}{12}.$$

Подставляя $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\phi = 60°$:

$$1 - \alpha\cos 60° = 1 - \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}, \quad V = \frac{v_0 \times \frac{3}{4}}{12} = \frac{v_0}{16}.$$

К моменту вылета её полная скорость в *системе клина* есть $\alpha v_0 = \frac{1}{2} v_0$ под углом $\phi = 60°$. Тогда

$$\big(v_x,\, v_y\big)_{(\text{клин})} = \big(\alpha v_0 \cos\phi,\ \alpha v_0 \sin\phi\big) = \Big(\tfrac{1}{2}v_0 \times \tfrac{1}{2},\ \ \tfrac{1}{2}v_0 \times \tfrac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \Big(\tfrac{1}{4}\,v_0,\ \tfrac{\sqrt{3}}{4}\,v_0\Big).$$

При переходе в лабораторную систему к горизонтальной компоненте прибавляется $V = \frac{v_0}{16}$. Значит

$$u_x = \tfrac{1}{4}\,v_0 + \tfrac{v_0}{16} = \frac{4}{16}\,v_0 + \frac{1}{16}\,v_0 = \frac{5}{16}\,v_0, \qquad u_y = \tfrac{\sqrt{3}}{4}\,v_0.$$

Тогда

$$u_x^2 + u_y^2 = \Big(\tfrac{5}{16}\,v_0\Big)^2 + \Big(\tfrac{\sqrt{3}}{4}\,v_0\Big)^2 = \frac{25}{256}\,v_0^2 + \frac{3}{16}\,v_0^2.$$

Следовательно, модуль скорости шайбы: $\left|\mathbf{u}_{\text{шайбы}}\right| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = v_0\sqrt{\frac{73}{256}}$, а её кинетическая энергия (в лабораторной С.О.) в момент вылета:

$$K_{\text{шайбы}} \;=\; \tfrac{1}{2}\,m\,\left|\mathbf{u}_{\text{шайбы}}\right|^2 \;=\; \tfrac{1}{2}\,m\,\frac{73}{256}\,v_0^2 \;=\; \frac{73}{512}\,m\,v_0^2.$$

Масса клина $M = 11\,m$. Скорость $V = \frac{v_0}{16}$. Тогда

$$K_{\text{клин}} \;=\; \tfrac{1}{2}\,(11\,m)\left(\tfrac{v_0}{16}\right)^2 \;=\; \frac{11}{2}\,m\,\frac{v_0^2}{256} \;=\; \frac{11}{512}\,m\,v_0^2.$$

По условию, если бросить шайбу с высоты h, то она наберёт скорость $0{,}4\,v_0$. Из

$$v^2 = 2\,g\,h \quad\Longrightarrow\quad (0{,}4\,v_0)^2 = 2\,g\,h \quad\Longrightarrow\quad 0{,}16\,v_0^2 = 2\,g\,h \quad\Longrightarrow\quad h = \frac{0{,}08\,v_0^2}{g}.$$

Тогда потенциальная энергия шайбы:

$$m\,g\,h \;=\; m\,g\,\frac{0{,}08\,v_0^2}{g} \;=\; 0{,}08\,m\,v_0^2 \;=\; \frac{2}{25}\,m\,v_0^2.$$

Начальная кинетическая энергия шайбы:

$$E_{\text{нач}} \;=\; \tfrac{1}{2}\,m\,v_0^2.$$

К моменту вылета имеем суммы:

$$K_{\text{шайбы}} \;=\; \frac{73}{512}\,m\,v_0^2, \quad K_{\text{клина}} \;=\; \frac{11}{512}\,m\,v_0^2, \quad m\,g\,h \;=\; \frac{2}{25}\,m\,v_0^2.$$

Обозначим теплопотери через Q. Тогда:

$$\tfrac{1}{2}\,m\,v_0^2 \;=\; \left[\,\frac{73}{512}\,m\,v_0^2 \;+\; \frac{11}{512}\,m\,v_0^2 \;+\; \frac{2}{25}\,m\,v_0^2\right] \;+\; Q.$$

$$Q \;=\; \left(\frac{1600}{3200} - \frac{781}{3200}\right)m\,v_0^2 \;=\; \frac{819}{3200}\;m\,v_0^2.$$

Доля тепловых потерь от начальной кинетической энергии:

$$N \;=\; \frac{Q}{\frac{1}{2}\,m\,v_0^2} \;=\; \frac{\frac{819}{3200}\,m\,v_0^2}{\frac{1}{2}\,m\,v_0^2} \;=\; \frac{819}{1600}.$$

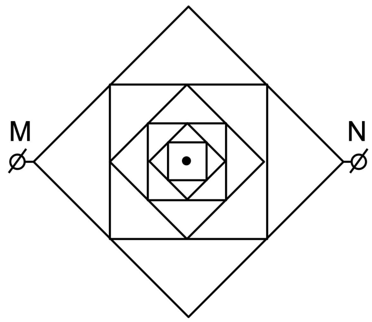
Ответ:

$$N = \frac{819}{1600}$$

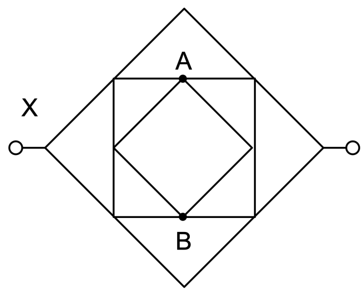
Критерии

1. Найдено значение проекции скорости шайбы на горизонтальную ось в системе отсчета стола в момент вылета шайбы с клина (+ 1 балл).
2. Верно записан закон сохранения импульса вдоль горизонтальной оси для начального момента и момента вылета шайбы с клина (+ 2 балла).
3. Верно записан закон сохранения энергии с учетом тепловых потерь (+ 2 балла).
4. Найдена высота клина (+ 1 балл).
5. Верно найдена доля тепловых потерь из законов сохранения (+ 4 балла).

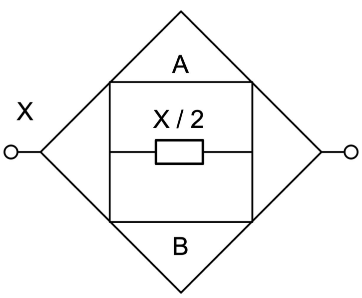
Задача 4. Проволочная конструкция состоит из бесконечно большого количества вложенных квадратов (см. рисунок). Конструкцию подключают к внешнему напряжению в точках M и N. Сторона наибольшего квадрата равна $a = 10$ см , сопротивление единицы длины проволоки $\rho = 0,2$ Ом/см. Найдите общее сопротивление всей конструкции.

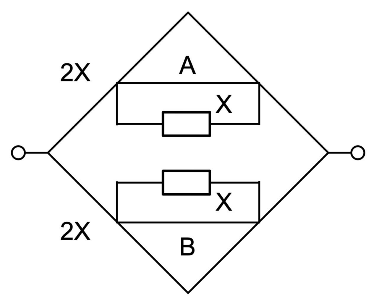


Возможное решение

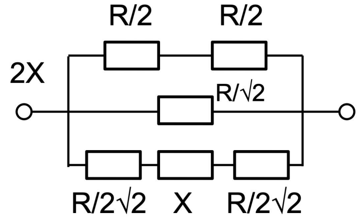


Обозначим общее сопротивление цепи за X. Заметим, что точки A и B имеют равный потенциал. Тогда в этих точках внутренний ромб можно отделить от внешнего квадрата. Этот ромб аналогичен исходному, но каждая его сторона имеет сопротивление в два раза меньше. Следовательно, его общее сопротивление равно $\frac{X}{2}$.





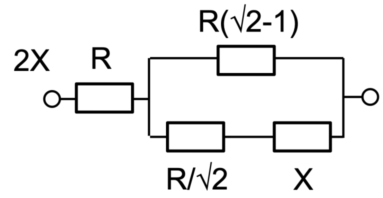
Заметим, что этот резистор можно представить как параллельное соединение двух резисторов по X каждый, поделив как внутренний, так и внешний ромб на две одинаковые части. Приходим к эквивалентной схеме для верхней половины, обозначая $R = \rho a$.



Найдем общее сопротивление среднего и верхнего провода:

$$R_1 = \frac{R \cdot \frac{R}{\sqrt{2}}}{R + \frac{R}{\sqrt{2}}}.$$

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} R = (\sqrt{2}-1)R.$$



Тогда получим упрощённую схему исходной цепи:
Приравняем общее сопротивление цепи к $2X$:

$$2X = R + \frac{(\sqrt{2}-1)R\left(\frac{R}{\sqrt{2}} + X\right)}{(\sqrt{2}-1)R + \frac{R}{\sqrt{2}} + X}.$$

Преобразуем уравнение:

$$(2X - R)\left(\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 1\right)R + X\right) = \left(\frac{R}{\sqrt{2}} + X\right)(\sqrt{2}-1)R.$$

В результате получаем квадратное уравнение:

$$X^2 + (\sqrt{2}-1)XR - \frac{\sqrt{2}}{2}R^2 = 0.$$

Решаем квадратное уравнение:

$$X = -\frac{(\sqrt{2}-1)R}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}R\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}R^2}.$$

Упрощая выражение и отбрасывая отрицательный корень:

$$X = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1}{2}\rho a \approx 1{,}3 \text{ Ом}.$$

Ответ:

$$X = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1}{2}\rho a \approx 1{,}3 \text{ Ом}$$

Критерии

1. Отмечено равенство потенциалов в точках A и B (+ 1 балл).
2. Верно получена эквивалентная схема после разделения внутреннего ромба (+ 3 балла).
3. Получено верное квадратное уравнение для неизвестного сопротивления цепи (+ 2 балла).
4. Получен верный формульный и числовой ответ (+ 4 балла).

Задача 5. В ёмкость с расплавом алюминия при температуре $T_1 = 670°C$ погрузили слиток алюминия при температуре $T_2 = 500°C$. После установления теплового равновесия слиток извлекли из расплава и обнаружили, что его масса увеличилась на 5%. На сколько процентов уменьшилась масса алюминия в расплаве? Считать, что удельная теплоёмкость алюминия одинакова для расплава и слитка и равна $C_a = 920 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot°C}$, удельная теплота плавления $\lambda = 390 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$, а температура плавления $T_{\text{пл}} = 660°C$. Теплообменом с окружающей средой пренебречь. Ответ округлите до сотых долей процента.

Возможное решение

Конечное состояние системы однозначно определяется равенством температуры расплава и слитка температуре плавления алюминия, то есть $T_{\text{кон}} = T_{\text{пл}} = 660°C$. Действительно, если часть алюминия остаётся в жидкой фазе, а часть — в твёрдой, то система не может иметь температуру выше или ниже $660°C$, поскольку дополнительное тепло либо расходуется на плавление твёрдой фазы, либо выделяется при кристаллизации расплава.

Пусть:

$$M_{\text{р}} \quad \text{— начальная масса расплава,}$$

$$M_{\text{с}} \quad \text{— начальная масса слитка,}$$

$$m \quad \text{— масса алюминия, перешедшая из жидкой фазы (расплава) в твёрдую фазу (слиток).}$$

По условию масса слитка в конце эксперимента увеличилась на 5%, то есть

$$\frac{M_{\text{с}} + m}{M_{\text{с}}} = 1{,}05 \quad \Longrightarrow \quad \frac{m}{M_{\text{с}}} = 0{,}05.$$

Запишем условие установления теплового баланса. Тепло, которое отдаёт остывающий расплав (от $670°C$ до $660°C$), равно

$$Q_1 = C_a\, M_{\text{р}} \big(T_1 - T_{\text{пл}}\big) = 920\, M_{\text{р}}\, (670 - 660) = 9200\, M_{\text{р}}.$$

Дополнительно при кристаллизации массы m выделяется теплота

$$Q_2 = \lambda\, m = 390\ 000\, m.$$

Слиток нагревается от $T_2 = 500°C$ до $T_{\text{пл}} = 660°C$, получая тепло

$$Q_3 = C_a\, M_{\text{с}} \big(T_{\text{пл}} - T_2\big) = 920\, M_{\text{с}}\, (660 - 500) = 920 \times 160\, M_{\text{с}} = 147\ 200\, M_{\text{с}}.$$

Тогда уравнение теплового баланса:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad \Longrightarrow \quad 9200\, M_{\text{р}} \ + \ 390\ 000\, m \ = \ 147\ 200\, M_{\text{с}}.$$

Делим это уравнение на $M_{\text{с}}$ и учитываем, что $\dfrac{m}{M_{\text{с}}} = 0{,}05$:

$$9200\, \frac{M_{\text{р}}}{M_{\text{с}}} \ + \ 390\ 000 \times 0{,}05 \ = \ 147\ 200.$$

$$390\ 000 \times 0{,}05 = 19\ 500 \quad \Longrightarrow \quad 9200\, \frac{M_{\text{р}}}{M_{\text{с}}} + 19\ 500 = 147\ 200.$$

$$9200\, \frac{M_{\text{р}}}{M_{\text{с}}} = 127\ 700 \quad \Longrightarrow \quad \frac{M_{\text{р}}}{M_{\text{с}}} = \frac{127\ 700}{9200} \approx 13{,}88.$$

Нас просят найти, на сколько процентов уменьшилась масса расплава. Поначалу она была $M_{\text{р}}$, а после кристаллизации массы m стала $M_{\text{р}} - m$. Следовательно, относительно исходного значения масса уменьшилась на

$$\frac{m}{M_{\text{р}}} \times 100\%.$$

Чтобы вычислить это процентное изменение массы, используем

$$\frac{m}{M_{\text{р}}} = \frac{m}{M_{\text{с}}}\, \frac{M_{\text{с}}}{M_{\text{р}}} = 0{,}05 \ \times \ \frac{1}{(M_{\text{р}}/M_{\text{с}})} = 0{,}05 \ \times \ \frac{1}{13{,}88} \ \approx \ 0{,}05 \times 0{,}07206 = 0{,}003603.$$

В процентах это примерно 0,36%.

Ответ:

$$\frac{m}{M_{\text{р}}} = 0{,}36\%$$

Критерии

1. Сделано верное заключение о фазовом составе конечного состояния и температуре системы в конечном состоянии (+ 3 балл).
2. Верно записано уравнение теплового баланса для начального и коненчного состояний (+ 4 балла).
3. Из уравнения на тепловой баланс получено верное уравнение на соотношение масс (+ 2 балла).
4. Верно решено уравнение на соотношение масс (+ 1 балл).