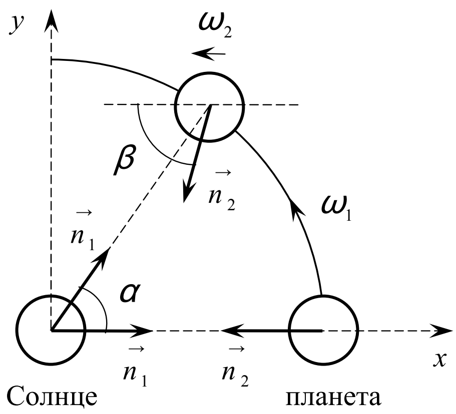
Задача 1. Вокруг некоторой звезды, которую для удобства будем называть Солнцем, по круговой орбите движется планета. Период обращения равен $T_1 = 110$ земных суток. Планета также вращается вокруг собственной оси, перпендикулярной плоскости орбиты. Период осевого вращения относительно далёких звёзд равен $T_2 = 80$ земных суток; направления орбитального и осевого вращений совпадают. Найдите следующие величины:

1. Продолжительность T солнечных суток на планете (время между двумя последовательными полуднями). Числовой ответ выразите в земных сутках и округлите до целого значения.
2. Количества оборотов N_1 и N_2, которые планета совершает за время T при орбитальном и осевом вращениях. Числовые значения округлите до десятых.

Подсказка: для наблюдателя на экваторе планеты в полдень Солнце находится в зените.

Возможное решение



Поместим начало координат в центр Солнца и введём вектор $\vec{n_1}$, направленный вдоль отрезка, соединяющего центры Солнца и планеты. Введём также вектор $\vec{n_2}$, жёстко связанный с планетой и направленный от её центра к произвольной точке на экваторе. Этот вектор участвует в осевом вращении вместе с планетой и определяет положение наблюдателя на экваторе. В дальнейшем нас будут интересовать толко направления введённых векторов. Поэтому будем считать их единичными.

Предположим, что в некоторый момент для наблюдателя наступил полдень, то есть Солнце оказалось в зените. В этом случае векторы $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ направлены противоположно друг другу. Примем этот момент за начало отсчёта времени, ось x системы координат направим вдоль вектора $\vec{n_1}$, ось y — в сторону орбитального движения планеты. За время t векторы $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ повернутся относительно своих начальных положений на углы α и β:

$$\alpha = \omega_1 t\,, \qquad \beta = \omega_2 t\,,$$

ω_1 и ω_2 — угловые скорости орбитального и осевого вращений:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}\,, \qquad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}\,.$$

Координаты векторов равны:

$$\vec{n_1} = (\cos\alpha\,, \sin\alpha)\,, \qquad \vec{n_2} = (-\cos\beta\,, -\sin\beta)\,.$$

Следующий полдень наступит в момент, когда векторы $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ снова окажутся направленными противоположно. Это условие удобно записать через скалярное произведение:

$$\vec{n_1}\,\vec{n_2} = -1\,.$$

Переходя к координатам, получаем:

$$-\cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta = -1\,, \qquad \cos(\alpha-\beta) = 1\,, \qquad \alpha - \beta = 2\pi n\,, \qquad \omega_1 t - \omega_2 t = 2\pi n\,,$$

$$t\left(\frac{2\pi}{T_1}-\frac{2\pi}{T_2}\right)=2\pi n\,,\qquad t\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)=n\quad\longrightarrow\quad t=\frac{T_1T_2}{T_2-T_1}\,n\,.$$

Здесь n — целое число. Продолжительность солнечных суток является наименьшим положительным значением t. При $T_1\neq T_2$ оно получается при $n=\pm1$ в зависимости от знака разности T_2-T_1. Обе возможности можно учесть, взяв модуль разности. Окончательно получаем:

$$T=\frac{T_1T_2}{|\,T_1-T_2\,|}=293\ \text{суток}\,.$$

Количества оборотов N_1 и N_2 определяются значениями углов поворота α и β за время T:

$$N_1=\frac{\alpha}{2\pi}=\frac{T}{T_1}=\frac{T_2}{|\,T_1-T_2\,|}=2{,}7\,,\qquad N_2=\frac{\beta}{2\pi}=\frac{T}{T_2}=\frac{T_1}{|\,T_1-T_2\,|}=3{,}7\,.$$

Как видно, разность N_2-N_1 равна единице. Если подумать, то до этого можно догадаться. Тогда решение запишется в одну строчку.

Ответ:

1. $T=T_1\,T_2/|\,T_1-T_2\,|=293$ суток.
2. $N_1=T/T_1=2{,}7\,,\qquad N_2=T/T_2=3{,}7\,.$

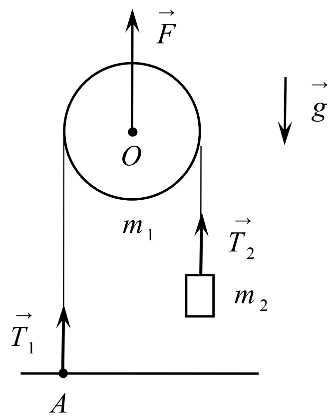
Критерии

1. Введены единичные векторы, связанные с орбитальным и осевым вращениями (+2 балла).
2. Правильно записаны координаты единичных векторов как функции времени (+1 балл).
3. Правильно сформулировано условие наступления полудня (+2 балла).
4. Правильно вычислено скалярное произведение векторов (+1 балл).
5. Получены правильные буквенный и числовой ответы для продолжительности солнечных суток (+2 балла).
6. Получены правильные буквенные и числовые ответы для количества оборотов (+2 балла).

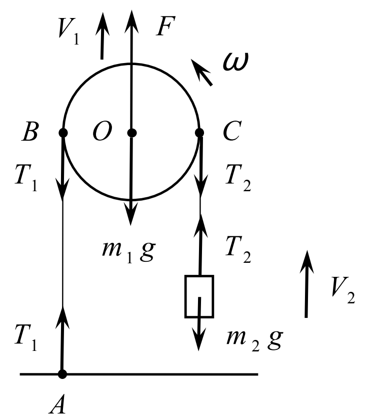
Задача 2. Блок, представляющий собой тонкий обруч с невесомыми спицами, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр O. Масса обруча $m_1 = 50$ г равномерно распределена по его длине. Через блок переброшена невесомая и нерастяжимая нить, к правому концу которой подвешен груз массой $m_2 = 75$ г. Левый вертикальный участок нити закреплён на полу в точке A. Ось блока поднимают вверх, действуя на неё постоянной силой $F = 2{,}2$ Н. Считая, что при движении нить не скользит по блоку, найдите следующие величины:

1. Ускорения оси блока a_1 и груза a_2.
2. Отношение $x = \Delta T / T_1$, где $\Delta T = T_1 - T_2$, T_1 и T_2 — силы натяжения левого и правого вертикальных участков нити. Числовое значение x округлите до сотых.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение



1. Пусть V_1 и V_2 — мгновенные скорости оси блока и груза, ω — мгновенное значение угловой скорости вращения блока вокруг своей оси, r — радиус блока. Рассмотрим мгновенные скорости V_B и V_C точек блока B и C, лежащих на концах его горизонтального диаметра. В точке B блок касается левого вертикального участка нити. Так как нить нерастяжима, скорости всех точек этого участка равны скорости точки A, то есть нулю. Поскольку нить не скользит по блоку, скорость V_B также обрашается в нуль. В точке C блок касается правого вертикального участка нити, скорости всех точек которого равны V_2. Поэтому $V_C = V_2$. Используя закон сложения скоростей, находим связь скоростей V_1 и V_2 и, как следствие, связь ускорений a_1 и a_2:

$$\begin{cases} V_B = V_1 - \omega r = 0 \\ V_C = V_1 + \omega r = V_2 \end{cases} \longrightarrow \quad V_2 = 2 V_1 , \quad a_2 = 2 a_1 .$$

2. Рассмотрим полную механическую энергию E системы, состоящей из блока, нити и груза. Для того чтобы правильно записать кинетическую энергию блока, воспользуемся известным фактом, что если тонкий обруч массой M катится без проскальзывания по столу, то его кинетическая энергия равна $M V^2$, где V — скорость центра обруча. В нашем случае роль стола играет левый вертикальный участок нити AB. Блок как бы катится вверх по этому неподвижному участку. Отсутствие проскальзывания соответствует обращению в нуль скорости V_B. Таким образом, в нашей задаче кинетическая энергия обруча равна $m_1 V_1^2$. Учитывая равенство $V_2 = 2 V_1$, получаем:

$$E = m_1 V_1^2 + \frac{m_2 V_2^2}{2} + m_1 g h_1 + m_2 g h_2 = (m_1 + 2 m_2) V_1^2 + m_1 g h_1 + m_2 g h_2 ,$$

h_1 и h_2 высоты оси обруча и центра масс груза над полом.

3. Рассмотрим баланс энергии системы за малое время Δt:

$$\Delta E = F V_1 \Delta t .$$

Здесь в левой части стоит приращение энергии ΔE, в правой части — работа силы F на перемещении $V_1 \Delta t$. В связи с этим равенством следует отметить два обстоятельства. Во-первых, сила, действующая на нить со стороны пола в точке A, не совершает работу, поскольку скорость точки A равна нулю. Во-вторых, так как нить не скользит по блоку, силы трения, действующие между блоком и верхним участком нити, являются силами трения покоя. Суммарная работа этих сил равна нулю (другими словами, при взаимодействии нити с блоком не выделяется тепло).

Запишем приращение энергии ΔE:

$$\Delta E = (m_1 + 2 m_2) \Delta (V_1^2) + m_1 g \Delta h_1 + m_2 g \Delta h_2 .$$

Обозначим через ΔV_1 приращение скорости оси блока за время Δt. Тогда для приращения квадрата скорости имеем:

$$\Delta (V_1^2) = (V_1 + \Delta V_1)^2 - V_1^2 = 2 V_1 \Delta V_1 + (\Delta V_1)^2 = 2 V_1 \Delta V_1 \left(1 + \frac{\Delta V_1}{2 V_1}\right) .$$

При уменьшении Δt отношение $\Delta V_1 / V_1$ становится сколь угодно малым и может быть отброшено. Тогда

$$\Delta (V_1^2) = 2 V_1 \Delta V_1 .$$

Приращения высот Δh_1 и Δh_2 равны:

$$\Delta h_1 = V_1 \Delta t , \qquad \Delta h_2 = V_2 \Delta t = 2 V_1 \Delta t .$$

Собирая всё вместе, получаем:

$$\Delta E = (m_1 + 2 m_2) \cdot 2 V_1 \Delta V_1 + m_1 g \cdot V_1 \Delta t + m_2 g \cdot 2 V_1 \Delta t .$$

Введём ускорение оси блока a_1:

$$a_1 = \frac{\Delta V_1}{\Delta t} .$$

Тогда $\Delta V_1 = a_1 \Delta t$ и выражение для ΔE принимает вид:

$$\Delta E = (m_1 + 2 m_2)(2 a_1 + g) V_1 \Delta t .$$

Подставляя этот результат в уравнение баланса энергии, находим ускорение a_1:

$$a_1 = \frac{F}{2 (m_1 + 2 m_2)} - \frac{g}{2} = 0{,}5 \text{ м/с}^2 .$$

Ускорение груза в два раза больше:

$$a_2 = 2 a_1 = 1 \text{ м/с}^2 .$$

4. Для того чтобы найти силы натяжения T_1 и T_2, запишем второй закон Ньютона для системы, состоящей из блока и верхнего участка нити. Внешними силами, действующими на эту систему, являются сила F, сила тяжести $m_1 g$ и направленные вниз силы натяжения, действующие со стороны вертикальных участков нити. Так как нить невесома, эти силы равны T_1 и T_2. Получаем:

$$m_1 a_1 = F - m_1 g - T_1 - T_2 .$$

Запишем также второй закон Ньютона для груза:

$$m_2\,a_2 = T_2 - m_2\,g\,.$$

Используя полученное выше выражение для ускорения a_1 и равенство $a_2 = 2\,a_1$, после некоторых алгебраических преобразований находим силы натяжения и их разность:

$$T_1 = \frac{F - m_1\,g}{2}\,, \qquad T_2 = \frac{F\,m_2}{m_1 + 2\,m_2}\,, \qquad \Delta\,T = T_1 - T_2 = m_1\,a_1\,.$$

Отношение $\Delta\,T/T_1$ равно:

$$x = \frac{\Delta\,T}{T_1} = \frac{2\,m_1\,a_1}{F - m_1\,g} = 0{,}03\,.$$

Ответ:

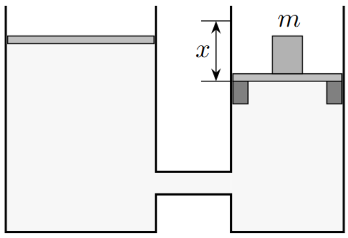
$$a_1 = \frac{F}{2\,(\,m_1 + 2\,m_2\,)} - \frac{g}{2} = 0{,}5 \text{ м/с}^2\,, \qquad a_2 = 2\,a_1 = 1 \text{ м/с}^2\,, \qquad x = \frac{2\,m_1 a_1}{F - m_1 g} = 0{,}03\,.$$

Критерии

1. Правильно найдены связи скоростей и ускорений блока и груза (+1 балл).
2. Правильно записана кинетическая энергия блока (+1 балл).
3. Правильно записано уравнение баланса энергии системы (+2 балла).
4. Получены правильные буквенный и числовой ответы для ускорения блока (+1 балл).
5. Правильно указаны силы, действующие на блок и верхний участок нити (+1 балл).
6. Правильно записано уравнение второго закона Ньютона для блока (+1 балл).
7. Правильно указаны силы, действующие на груз (+1 балл).
8. Правильно записано уравнение второго закона Ньютона для груза (+1 балл).
9. Получены правильные буквенные и числовые ответы для сил натяжения нити (+1 балл).

Задача 3. Правое колено пневматического пресса диаметром $d = 5{,}0$ см перекрыто легким плотно пригнанным поршнем, лежащим на упорах. На поршень положили груз массой $m = 5{,}0$ кг. После этого левое колено закрывали легким поршнем, так, что давление воздуха в цилиндрах осталось равным нормальному атмосферному давлению $p_0 = 100$ кПа, а его объем равным $V_0 = 22$ л. Какую минимальную работу A_{min} необходимо совершить, чтобы двигая левый поршень, поднять груз в правом колене на высоту $x = 10{,}0$ см?

Утечкой газа, трением поршней о стенки цилиндров и теплоемкостью пресса можно пренебречь. Считать, что воздух в прессе теплоизолирован. Уравнение адиабатного процесса для воздуха имеет вид $PV^{7/5} = const$.



Возможное решение

Для того, чтобы поднять груз, первоначально необходимо довести давление газа до величины:

$$P_1 = P_0 + \frac{4mg}{\pi d^2},$$

где $\frac{\pi d^2}{4}$ - площадь поршня в правом колене пресса. Работа, которая будет совершена при этом равна изменению внутренней энергии газа, так как при адиабатном процессе теплообмен отсутствует. Используя заданное уравнение процесса и уравнение состояния идеального газа, запишем уравнение адиабатного процесса «в координатах TP»:

$$PV^\gamma = \text{ const}; \quad \frac{PV}{T} = \text{ const}; \Rightarrow TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{ const}$$

Вычислим изменение температуры газа:

$$\Delta T = T_0 \left[\left(1 + \frac{4mg}{\pi d^2 P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

Работа совершенная над газом на этом этапе равна изменению внутренней энергии и вычисляется по формуле:

$$A_l = \Delta U = \frac{5}{2}\nu R \Delta T$$

После того, как давление газа достигло значения P_1, груз начнет подниматься, при этом давление, объем и температура газа изменяться не будут, поэтому совершенная работа будет равна изменению потенциальной энергии груза $A_2 = mgx$. Таким образом полная работа по поднятию груза в правом колене рассчитывается по формуле:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{5}{2}\nu R T_0 \left[\left(1 + \frac{4mg}{\pi d^2 P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + mgx =$$

$$= \frac{5}{2} P_0 V_0 \left[\left(1 + \frac{4mg}{\pi d^2 P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + mgx \approx 360 \text{ Дж}$$

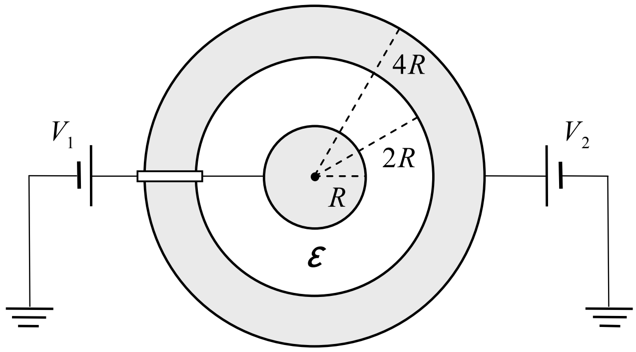
Заметим, что основной вклад дает первое слагаемое, то есть работа, совершенная при неподвижном грузе.

Критерии

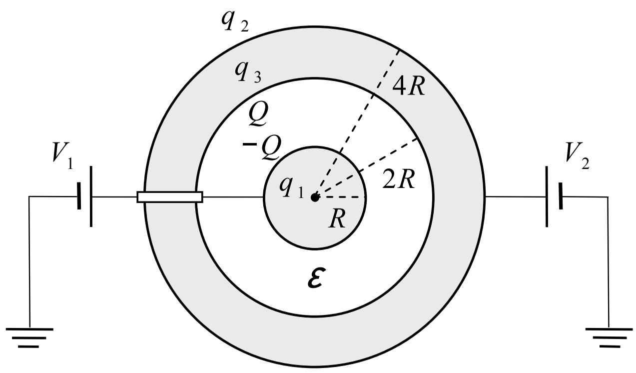
1. Правильно расчитано давление для начала подъёма груза (+1 балл).
2. Правильно рассчитано изменение темпераутры газа на первом этапе (+2 балла).
3. Получено правильное выражение для работы газа на первом этапе. (+2 балла).
4. Указано, что дальнейший подъем происходит без изменения макропараметров газа (+2 балла).
5. Указано, что работа на втором этапе расходуется на изменение потенциальной энергии груза (+2 балла).
6. Получено правильное выражение для работы при подъеме груза, рассчитано верное численное значение работы (+1 балл).

Задача 4. Металлический шар радиуса R окружён металлическим сферическим слоем. Центры шара и слоя совпадают; внутренний радиус слоя равен $2R$, внешний — $4R$. Всё пространство между шаром и слоем заполнено твёрдым однородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 2{,}5$. Шар и слой заземляют через батареи с ЭДС $V_1 = 4{,}5$ В и $V_2 = 9$ В (провод, заземляющий шар, не касается слоя). Найдите следующие величины:

1. Отношеие x_1 заряда Q, индуцированного на внешней границе диэлектрика, к заряду шара q_1: $x_1 = Q/q_1$.
2. Отношение x_2 заряда q_2 внешней поверхности металлического слоя к заряду шара q_1: $x_2 = q_2/q_1$.



Возможное решение



1. Пусть q_1 — заряд шара, q_2 — заряд внешней поверхности металлического слоя, q_3 — заряд его внутренней поверхности. Заряд на внешней границе диэлектрика обозначим через Q. Так как диэлектрик электронейтрален, заряд его внутренней границы равен $-Q$. Для того чтобы найти Q, рассмотрим в диэлектрике некоторую точку A, лежащую на расстоянии r_A от центра шара. Напряжённость электрического поля в этой точке равна:

$$E_A = \frac{k\,q_1}{\varepsilon\,r_A^2}\,, \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,.$$

Физической причиной ослабления поля в диэлектрике является наличие поляризационных зарядов, действие которых частично компенсирует электрическое поле шара. Поэтому заменим диэлектрический слой двумя сферами, совпадающими с границами диэлектрика. Внутренняя сфера имеет радиус R и несёт заряд $-Q$, внешняя — радиус $2R$ и заряд Q . Тогда для напряжённости поля в точке A имеем:

$$E_A = \frac{k\,q_1}{r_A^2} - \frac{k\,Q}{r_A^2} = \frac{k\,(\,q_1 - Q\,)}{r_A^2}\,.$$

Приравнивая выражения для E_A, получаем:

$$\frac{k\,q_1}{\varepsilon\,r_A^2} = \frac{k\,(\,q_1 - Q\,)}{r_A^2}\,, \qquad \frac{q_1}{\varepsilon} = q_1 - Q\,, \qquad Q = \frac{q_1\,(\,\varepsilon - 1\,)}{\varepsilon} \quad \longrightarrow \quad x_1 = \frac{Q}{q_1} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 0{,}6\,.$$

2. Рассмотрим теперь заряды на границах металлического слоя. Возьмём в этом слое некоторую точку B, лежащую на расстоянии r_B от центра шара. Напряжённость электрического поля в этой точке равна нулю. Выражая её через заряды, получаем:

$$E_B = k\,\frac{q_1 - Q + Q + q_3}{r_B^2} = k\,\frac{q_1 + q_3}{r_B^2} = 0 \quad\longrightarrow\quad q_3 = -q_1\,.$$

Используя найденные значения Q и q_3, запишем потенциал шара φ_1 в его центре и потенциал металлического слоя φ_2 в точке B:

$$\varphi_1 = k\,\left(\frac{q_1 - Q}{R} + \frac{Q - q_1}{2\,R} + \frac{q_2}{4\,R}\right) = k\,\left(\frac{q_1 - Q}{2R} + \frac{q_2}{4\,R}\right) = \frac{k}{2\,R}\,\left(\frac{q_1}{\varepsilon} + \frac{q_2}{2}\right)\,,$$

$$\varphi_2 = k\,\left(\frac{q_1 - Q + Q - q_1}{r_B} + \frac{q_2}{4\,R}\right) = \frac{k\,q_2}{4\,R}\,.$$

Полагая $\varphi_1 = V_1$ и $\varphi_2 = V_2$, получаем два уравнения для определения зарядов q_1 и q_2:

$$\frac{k}{2\,R}\,\left(\frac{q_1}{\varepsilon} + \frac{q_2}{2}\right) = V_1\,, \qquad \frac{k\,q_2}{4\,R} = V_2\,.$$

Из второго уравнения сразу находим q_2:

$$q_2 = \frac{4\,R\,V_2}{k}\,.$$

Для q_1 получаем:

$$\frac{q_1}{\varepsilon} + \frac{2\,R\,V_2}{k} = \frac{2\,R\,V_1}{k} \quad\longrightarrow\quad q_1 = \frac{2\,R\,\varepsilon\,(\,V_1 - V_2\,)}{k}\,.$$

Отношение зарядов q_2 и q_1 равно:

$$x_2 = \frac{q_2}{q_1} = \frac{2\,V_2}{\varepsilon\,(\,V_1 - V_2\,)} = -1{,}6\,.$$

Так как разность $V_1 - V_2 < 0$, заряд шара q_1 оказывается отрицательным, хотя шар присоединён к положительному полюсу батареи V_1.

Ответ:

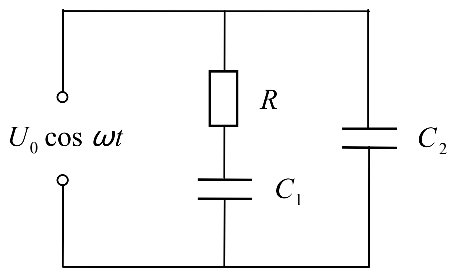
$$x_1 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 0{,}6\,, \qquad x_2 = \frac{2\,V_2}{\varepsilon\,(\,V_1 - V_2\,)} = -1{,}6\,.$$

Критерии

1. Правильно найден заряд на внешней границе диэлектрика (+2 балла).
2. Правильно найден заряд на внутренней поверхности металлического слоя (+2 балла).
3. Правильно записаны потенциалы шара и металлического слоя (+2 балла).
4. Правильно записаны связи потенциалов с ЭДС батарей (+1 балл).
5. Правильно найден заряд на внешней поверхности металлического слоя (+1 балл).
6. Правильно найден заряд шара (+1 балл).
7. Получены правильные буквенный и числовой ответы для отношений зарядов (+1 балл).

Задача 5. Цепь переменного тока состоит из двух параллельных ветвей. Левая ветвь — сопротивление $R = 2$ кОм и конденсатор ёмкостью $C_1 = 2{,}5$ мкФ, правая ветвь — конденсатор ёмкостью $C_2 = 1{,}5$ мкФ. На вход цепи подаётся напряжение $U_0 \cos\omega t$ с амплитудой $U_0 = 36$ В и круговой частотой $\omega = 400$ с$^{-1}$. В установившемся режиме сила тока в правой ветви периодически обращается в нуль. Для этого случая найдите следующие величины:

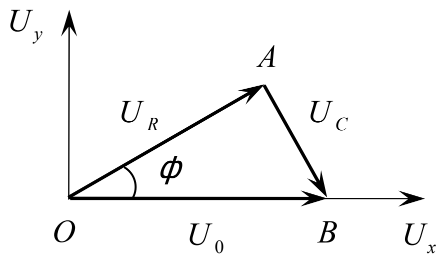
1. Абсолютную величину силы тока I в левой ветви. Числовой ответ выразите в миллиамперах.
2. Заряды конденсаторов q_1 и q_2. Числовые значения выразите в микрокулонах.



Возможное решение

Напряжение на конденсаторе C_2 равно напряжению источника. В момент времени, когда сила тока в правой ветви обращается в нуль, заряд конденсатора q_2 максимален. Это означает, что в этот момент напряжение источника такжу максимально и равно U_0. Отсюда сразу находим заряд q_2:

$$q_2 = U_0 C_2 = 54 \text{ мкКл}\,.$$



Рассмотрим векторную диаграмму напряжений для левой ветви. Пусть U_0 — вектор напряжения источника, U_R и U_C — векторы напряжений на сопротивлении R и конденсаторе C_1. Длины этих векторов равны амплитудам напряжений на соответсвующих элементах. Вектор U_C повёрнут вправо на угол 90° по отношению к вектору U_R (напряжение на конденсаторе отстаёт по фазе от напряжения на сопротивлении на 90°). Сумма векторов U_R и U_C равна вектору U_0. Диаграмма как целое равномерно вращается относительно неподвижных осей против часовой стрелки с угловой скоростью ω. Поскольку приложенное напряжение зависит от времени по закону $\cos\omega t$, напряжения на отдельных элементах получаются проецированием соответствующих векторов на горизонтальную ось U_x.

Представленная на рисунке диаграмма соответствует моменту времени, когда сила тока в правой ветви обращается в нуль. В этом случае напряжение источника максимально и вектор U_0 лежит на горизонтальной оси. В результате имеем треугольник OAB с прямым углом при вершине A. По теореме Пифагора:

$$U_R^2 + U_C^2 = U_0^2\,.$$

Введем вектор I_A, представляющий собой амплитуду силы тока в левой ветви. Этот вектор сонаправлен вектору U_R. Амплитуды напряжений связаны с амплитудой силы тока следующими соотношениями:

$$U_R = I_A R\,, \qquad U_C = \frac{I_A}{\omega C_1}\,,$$

$1/(\omega C_1)$ — ёмкостное сопротивление. Выразим U_R и U_C через U_0:

$$\frac{U_C}{U_R} = \frac{1}{\omega R C_1}\,, \qquad U_C = \frac{U_R}{\omega R C_1}\,, \qquad U_R^2 + \frac{U_R^2}{(\omega R C_1)^2} = U_0^2\,,$$

$$U_R = \frac{U_0 \cdot \omega\, R\, C_1}{\sqrt{1 + (\,\omega\, R\, C_1\,)^2}}\,, \qquad U_C = \frac{U_0}{\sqrt{1 + (\,\omega\, R\, C_1\,)^2}}\,.$$

В треугольнике OAB введём угол φ между векторами U_0 и U_R. Имеем:

$$\cos\varphi = \frac{U_R}{U_0}\,, \qquad \sin\varphi = \frac{U_C}{U_0}\,.$$

Напряжения на сопротивлении R и конденсаторе C_1 равны проекциям векторов U_R и U_C на горизонтальную ось U_x, то есть произведениям $U_R\,\cos\varphi$ и $U_C\,\sin\varphi$. Для силы тока I в левой ветви и заряда q_1 конденсатора C_1 получаем:

$$I = \frac{U_R\,\cos\varphi}{R} = \frac{U_R^2}{R\,U_0} = \frac{U_0}{R} \cdot \frac{(\,\omega\, R\, C_1\,)^2}{1 + (\,\omega\, R\, C_1\,)^2}\,, \qquad q_1 = C_1\, U_C\, \sin\varphi = \frac{C_1\, U_C^2}{U_0} = \frac{C_1\, U_0}{1 + (\,\omega\, R\, C_1\,)^2}\,.$$

Подстановка числовых значений даёт:

$$\omega\, R\, C_1 = 2\,, \qquad I = 14{,}4\ \text{мА}\,, \qquad q_1 = 18\ \text{мкКл}\,.$$

Ответ:

$$I = \frac{U_0}{R} \cdot \frac{(\,\omega\, R\, C_1\,)^2}{1 + (\,\omega\, R\, C_1\,)^2} = 14{,}4\ \text{мА}\,, \qquad q_1 = \frac{U_0\, C_1}{1 + (\,\omega\, R\, C_1\,)^2} = 18\ \text{мкКл}\,, \qquad q_2 = U_0\, C_2 = 54\ \text{мкКл}\,.$$

Критерии

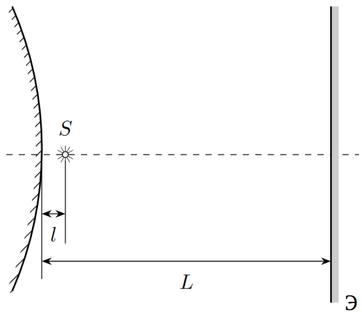
1. Указано, что при обращении в нуль силы тока в правой ветви заряд второго конденсатора и напряжение источника максимальны (+1 балл).
2. Получены правильные буквенный и числовой ответы для заряда второго конденсатора (+1 балл).
3. Правильно нарисована векторная диаграмма для левой ветви (+3 балла).
4. Правильно найдены амплитуды напряжений на сопротивлении и первом конденсаторе (+2 балла).
5. Правильно найдена разность фаз между напряжением на сопротивлении и напряжением источника (+1 балл).
6. Получены правильные буквенный и числовой ответы для силы тока в левой ветви (+1 балл).
7. Получены правильные буквенный и числовой ответы для заряда первого конденсатора (+1 балл).

Задача 6. Точечный источник S монохроматического света с длиной волны $\lambda = 550$ нм расположен на расстоянии $l = 1{,}0$ мм от выпуклого сферического зеркала с радиусом кривизны $R = 20$ см. На расстоянии $L = 5{,}0$ м от зеркала расположен плоский экран.

1. Опишите интерференционную картину на экране, найдите положения максимумов интенсивности света на экране.

2. Сколько интерференционных максимумов можно наблюдать в такой схеме? На каком минимальном расстоянии от центра экрана можно наблюдать интерференционную картину, если минимальная толщина наблюдаемой интерференционной полосы не превышает $\Delta x = 1{,}0$ мм?

Указание: при решении воспользуйтесь приближённым равенством $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm x/2$, справедливом при малых $|x| \ll 1$.



Возможное решение

Интерферировать будут волны, идущие непосредственно от источника и отраженные от зеркала. Расчет интерференционной картины можно провести как сложение волн от двух источников: S и его изображения в зеркале S', расстояние между которыми приблизительно равно $2l$. Изображение S' находится на расстоянии $f = RL/(2l + R) \approx l$, т.к. $R \gg l$. Понятно, что интерференционные полосы будут представлять собой концентрические кольца.

Рассмотрим разность хода волн от источников до некоторой точки на экране, находящейся на расстоянии r от центра экрана. Используя теорему Пифагора и малость параметра l, напишем:

$$L_{1.2} = \sqrt{r^2 + (L \pm l)^2} \approx \sqrt{r^2 + L^2 \pm 2Ll} = \sqrt{r^2 + L^2} \cdot \sqrt{1 \pm \frac{2Ll}{r^2 + L^2}}$$
$$\approx \sqrt{r^2 + L^2}\left(1 \pm \frac{Ll}{r^2 + L^2}\right)$$

Напишем условие максимума интерференции: разность хода равна целому числу длин волн

$$\frac{2Ll}{\sqrt{r^2 + L^2}} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda.$$

Второе слагаемое учитывает изменение фазы волны при отражении от оптически более плотной среды. Из этого выражения найдем радиусы интерференционных полос, соответствующие k-ому порядку интерференции:

$$r_k = L\sqrt{\left(\frac{2l}{(k - 1/2)\lambda}\right)^2 - 1}$$

Из полученного выражения следует:

1. С увеличением порядка интерференции радиус кольца уменьшается, максимальному порядку интерференции соответствует центральное пятно, где разность хода максимальна и примерно равна $2l$;

2. Число интерференционных полос ограничено, их число можно подсчитать из условия неотрицательности подкоренного выражения $k_{\max} \approx \frac{2l}{\lambda} \approx 3600$.

Так как $l \gg \lambda$, то в середине интерференционной картины, где порядок интерференции велик, выражение для радиуса колец можно упростить:

$$r_k = L\sqrt{\left(\frac{2l}{(k - 1/2)\lambda}\right)^2 - 1} \approx L\frac{2l}{k\lambda}$$

следовательно, ширина полосы зависит от ее номера по закону:

$$\Delta r_k \approx L\frac{2l}{k^2\lambda}$$

и убывает с ростом порядка интерференции. Подставляя в формулу минимальную наблюдаемую ширину полосы, определим максимальный порядок интерференции:

$$k = \sqrt{\frac{2lL}{\Delta x\lambda}} \approx 2000,$$

что соответствует радиусу интерференционного кольца $r_{2000} \approx 10$ м. Таким образом, интерференционную картину можно наблюдать на расстояниях превышающих 10 м от центра экрана.

Критерии

1. Обосовано, что интерференционная картина имеет вид концентрических колец. (+1 балл)
2. Правильно определено положение изображения в сферическом зеркале. (+1 балл)
3. Указано, что при заданых в условии численных значениях зеркало можно считать плоским. (+1 балл)
4. Правильно рассчитаны оптические пути волн от источника и изображения. (+1 балл)
5. Преобразовано выражение для разности хода с учетом малости расстояния от источника до зеркала. (+1 балл)
6. Правильно записано условие интерференционных максимумов, получено выражение для радиусов светлых колец. (+2 балла)
7. Правильно получено (строго или с учетом приближений) выражение для ширины интерференционного кольца в зависимости от его номера. (+1 балл)
8. Правильно определен максимальный наблюдаемый порядок интерференции. (+1 балл)
9. Правильно определено минимальное расстояние для наблюдения интерференции на экране. (+1 балл)