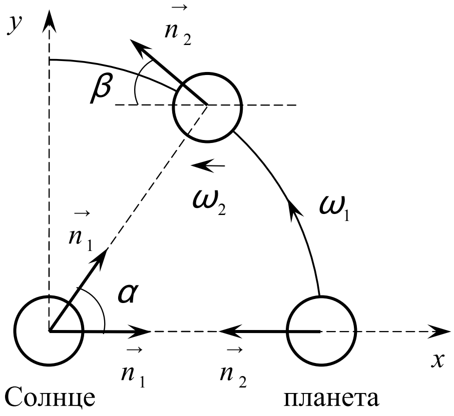
Задача 1. Вокруг некоторой звезды, которую для удобства будем называть Солнцем, по круговой орбите движется планета. Период обращения равен $T_1 = 230$ земных суток. Планета также вращается вокруг собственной оси, перпендикулярной плоскости орбиты. Период осевого вращения относительно далёких звёзд равен $T_2 = 300$ земных суток; направления орбитального и осевого вращений противоположны. Найдите следующие величины:

1. Продолжительность T солнечных суток на планете (время между двумя последовательными полуднями). Числовой ответ выразите в земных сутках и округлите до целого значения.
2. Количества оборотов N_1 и N_2, которые планета совершает за время T при орбитальном и осевом вращениях. Числовые значения округлите до сотых.

Подсказка: для наблюдателя на экваторе планеты в полдень Солнце находится в зените.

Возможное решение



Поместим начало координат в центр Солнца и введём вектор $\overrightarrow{n_1}$, направленный вдоль отрезка, соединяющего центры Солнца и планеты. Введём также вектор $\overrightarrow{n_2}$, жёстко связанный с планетой и направленный от её центра к произвольной точке на экваторе. Этот вектор участвует в осевом вращении вместе с планетой и определяет положение наблюдателя на экваторе. В дальнейшем нас будут интересовать толко направления введённых векторов. Поэтому будем считать их единичными.

Предположим, что в некоторый момент для наблюдателя наступил полдень, то есть Солнце оказалось в зените. В этом случае векторы $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ направлены противоположно друг другу. Примем этот момент за начало отсчёта времени, ось x системы координат направим вдоль вектора $\overrightarrow{n_1}$, ось y — в сторону орбитального движения планеты. За время t векторы $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ повернутся относительно своих начальных положений на углы α и β:

$$\alpha = \omega_1 t\,, \qquad \beta = \omega_2 t\,,$$

ω_1 и ω_2 — угловые скорости орбитального и осевого вращений:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}\,, \qquad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}\,.$$

Координаты векторов равны:

$$\overrightarrow{n_1} = (\cos\alpha\,, \sin\alpha)\,, \qquad \overrightarrow{n_2} = (-\cos\beta\,, \sin\beta)\,.$$

Следующий полдень наступит в момент, когда векторы $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ снова окажутся направленными противоположно. Это условие удобно записать через скалярное произведение:

$$\overrightarrow{n_1}\,\overrightarrow{n_2} = -1\,.$$

Переходя к координатам, получаем:

$$-\cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta = -1\,, \qquad \cos(\alpha+\beta) = 1\,, \qquad \alpha+\beta = 2\pi n\,, \qquad \omega_1 t + \omega_2 t = 2\pi n\,,$$

$$t\left(\frac{2\pi}{T_1}+\frac{2\pi}{T_2}\right)=2\pi n\,,\qquad t\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)=n\quad\longrightarrow\quad t=\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}\,n\,.$$

Здесь n — целое число. Продолжительность солнечных суток является наименьшим положительным значением t. Оно получается при $n=1$:

$$T=\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}=130\ \text{суток}\,.$$

Количества оборотов N_1 и N_2 определяются значениями углов поворота α и β за время T:

$$N_1=\frac{\alpha}{2\pi}=\frac{T}{T_1}=\frac{T_2}{T_1+T_2}=0{,}57\,,\qquad N_2=\frac{\beta}{2\pi}=\frac{T}{T_2}=\frac{T_1}{T_1+T_2}=0{,}43\,.$$

Как видно, сумма N_1+N_2 равна единице. Если подумать, то до этого можно догадаться. Тогда решение запишется в одну строчку.

Ответ:

1. $T=T_1\,T_2/(\,T_1+T_2\,)=130$ суток.
2. $N_1=T/T_1=0{,}57\,,\qquad N_2=T/T_2=0{,}43\,.$

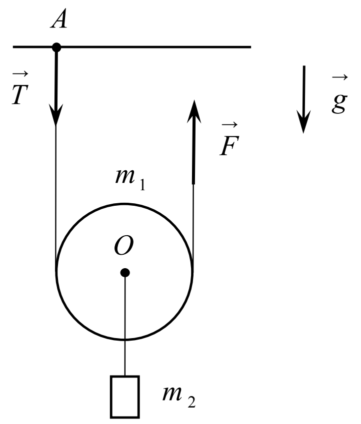
Критерии

1. Введены единичные векторы, связанные с орбитальным и осевым вращениями (+2 балла).
2. Правильно записаны координаты единичных векторов как функции времени (+1 балл).
3. Правильно сформулировано условие наступления полудня (+2 балла).
4. Правильно вычислено скалярное произведение векторов (+1 балл).
5. Получены правильные буквенный и числовой ответы для продолжительности солнечных суток (+2 балла).
6. Получены правильные буквенные и числовые ответы для количества оборотов (+2 балла).

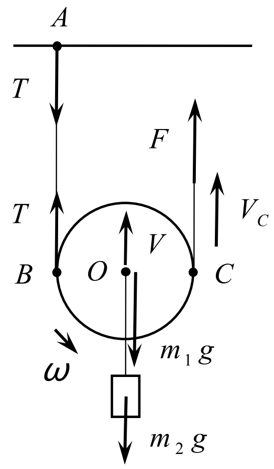
Задача 2. Блок, представляющий собой тонкий обруч с невесомыми спицами, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр O. Масса обруча $m_1 = 0{,}1$ кг равномерно распределена по его длине. К оси блока подвешен груз массой $m_2 = 0{,}3$ кг. Нижняя половина блока охватывается невесомой и нерастяжимой нитью с вертикальными концевыми участками. Левый участок закреплён на потолке в точке A, а правый поднимают вверх, действуя на него постоянной силой $F = 2{,}1$ Н. Считая, что при движении нить не скользит по блоку, найдите следующие величины:

1. Ускорение центра блока a.
2. Отношение $x = \Delta T/F$, где $\Delta T = F - T$, T — сила натяжения левого участка нити. Числовое значение x округлите до сотых.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение



1. Пусть V — мгновенная скорость оси блока и груза, ω — мгновенная угловая скорость вращения блока вокруг своей оси, r — радиус блока. Рассмотрим мгновенные скорости V_B и V_C точек блока B и C, лежащих на концах его горизонтального диаметра. В точке B блок касается левого вертикального участка нити. Так как нить нерастяжима, скорости всех точек этого участка равны скорости точки A, то есть нулю. Поскольку нить не скользит по блоку, скорость V_B также обрашается в нуль. В точке C блок касается правого вертикального участка нити, скорости всех точек которого равны V_C. Используя закон сложения скоростей, находим связь скоростей V и V_C:

$$V_B = V - \omega r = 0\,, \qquad \omega r = V\,, \qquad V_C = V + \omega r = 2V\,.$$

2. Рассмотрим полную механическую энергию E системы, состоящей из блока, нити и груза. Для того чтобы правильно записать кинетическую энергию блока, воспользуемся известным фактом, что если тонкий обруч массой M катится без проскальзывания по столу, то его кинетическая энергия равна MV^2, где V — скорость центра обруча. В нашем случае роль стола играет левый вертикальный участок нити AB. Блок как бы катится вверх по этому неподвижному участку. Отсутствие проскальзывания соответствует обращению в нуль скорости V_B. Таким образом, в нашей задаче кинетическая энергия обруча равна $m_1 V^2$. Получаем:

$$E = m_1 V^2 + \frac{m_2 V^2}{2} + m_1 g h_1 + m_2 g h_2 = \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) V^2 + m_1 g h_1 + m_2 g h_2 \,,$$

h_1 и h_2 высоты оси обруча и центра масс груза над полом.

3. Рассмотрим баланс энергии системы за малое время Δt:

$$\Delta E = F V_C \Delta t \,.$$

Здесь в левой части стоит приращение энергии ΔE, в правой части — работа силы F на перемещении $V_C \Delta t$ (это перемещение точки приложения силы F). В связи с этим равенством следует отметить два обстоятельства. Во-первых, сила, действующая на нить со стороны потолка в точке A, не совершает работу, поскольку скорость точки A равна нулю. Во-вторых, так как нить не скользит по блоку, силы трения, действующие между блоком и нижним участком нити, являются силами трения покоя. Суммарная работа этих сил равна нулю (другими словами, при взаимодействии нити с блоком не выделяется тепло).

Запишем приращение энергии ΔE:

$$\Delta E = \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) \Delta (V^2) + m_1 g \Delta h_1 + m_2 g \Delta h_2 \,.$$

Обозначим через ΔV приращение скорости оси блока за время Δt. Тогда для приращения квадрата скорости имеем:

$$\Delta (V^2) = (V + \Delta V)^2 - V^2 = 2 V \Delta V + (\Delta V)^2 = 2 V \Delta V \left(1 + \frac{\Delta V}{2 V} \right) .$$

При уменьшении Δt отношение $\Delta V / V$ становится сколь угодно малым и может быть отброшено. Тогда

$$\Delta (V^2) = 2 V \Delta V \,.$$

Приращения высот Δh_1 и Δh_2 равны:

$$\Delta h_1 = \Delta h_2 = V \Delta t \,.$$

Собирая всё вместе, получаем:

$$\Delta E = \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) \cdot 2 V \Delta V + (m_1 + m_2) g V \Delta t \,.$$

Введём ускорение оси блока a:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \,.$$

Тогда $\Delta V = a \Delta t$ и выражение для ΔE принимает вид:

$$\Delta E = (2 m_1 + m_2) V a \Delta t + (m_1 + m_2) g V \Delta t \,.$$

Подставляя этот результат в уравнение баланса энергии и полагая $V_C = 2 V$, находим ускорение a:

$$(2 m_1 + m_2) V a \Delta t + (m_1 + m_2) g V \Delta t = F \cdot 2 V \Delta t \quad \longrightarrow \quad a = \frac{2 F - (m_1 + m_2) g}{2 m_1 + m_2} = 0{,}4 \text{ м/с}^2 \,.$$

4. Для того чтобы найти силу натяжения T, запишем второй закон Ньютона для системы, состоящей из блока, груза и нижнего участка нити. Внешними силами, действующими на эту систему, являются силы тяжести $m_1 g$ и $m_2 g$, а также направленные вверх силы натяжения, действующие со стороны вертикальных участков нити. Так как нить невесома, эти силы равны T и F. Получаем:

$$(m_1 + m_2) a = T + F - (m_1 + m_2) g \,.$$

Используя полученное выше выражение для ускорения a, после некоторых алгебраических преобразований находим силу натяжения T, разность $\Delta T = F - T$ и отношение $\Delta T / F$:

$$T = \frac{m_2 F + (m_1 + m_2) m_1 g}{2 m_1 + m_2}, \qquad \Delta T = F - T = m_1 a, \qquad x = \frac{\Delta T}{F} = \frac{m_1 a}{F} = 0{,}02.$$

Ответ:

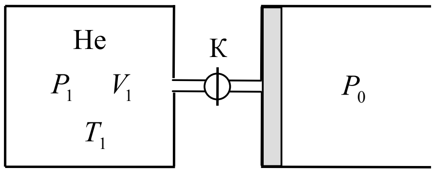
$$a = \frac{2F - (m_1 + m_2) g}{2 m_1 + m_2} = 0{,}4\ \text{м/с}^2, \qquad x = \frac{m_1 a}{F} = 0{,}02.$$

Критерии

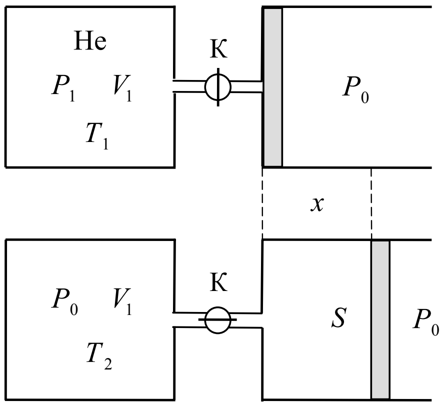
1. Правильно найдена связь скоростей блока и правого вертикального участка нити (+1 балл).
2. Правильно записана кинетическая энергия блока (+2 балла).
3. Правильно записано уравнение баланса энергии системы (+2 балла).
4. Получены правильные буквенный и числовой ответы для ускорения блока (+2 балла).
5. Правильно указаны силы, действующие на блок и нижний участок нити (+1 балл).
6. Правильно записано уравнение второго закона Ньютона для блока (+1 балл).
7. Получены правильные буквенный и числовой ответы для силы натяжения нити (+1 балл).

Задача 3. Сосуд постоянного объёма V_1 соединён короткой трубкой с краном К с длинным горизонтальным цилиндром, в котором может свободно двигаться поршень. Правый торец цилиндра открыт в атмосферу, давление которой P_0 постоянно. В начальном состоянии кран закрыт, поршень прижат силой атмосферного давления к левому торцу цилиндра, в сосуде находится гелий при температуре $T_1 = 300$ К и давлении $P_1 = k\,P_0$, где $k = 4$. Кран открывают, гелий перетекает в цилиндр, и вся система переходит в новое состояние равновесия. Считая, что все стенки, поршень и трубка с краном не проводят тепло, найдите следующие величины:

1. Конечную температуру гелия T_2.
2. Отношение $\Delta V/V_1$, где ΔV — приращение объёма гелия (конечный объём гелия в цилиндре). Объём трубки с краном не учитывайте.



Возможное решение



1. Пусть ν — число молей газа, S и x — площадь и перемещение поршня. Согласно первому началу термодинамики имеем:

$$0 = \nu\,C_V\,(\,T_2 - T_1\,) + A\,,$$

C_V — молярная теплоёмкость при постоянном объёме, A — работа газа. Запишем уравнение баланса энергии для поршня:

$$0 = A - P_0\,S\,x\,.$$

Нуль в левой части — приращение механической энергии поршня (энергия не изменилась). Второе слагаемое в правой части представляет собой работу постоянной силы атмосферного давления $P_0\,S$ на перемещении x. Эта работа отрицательна, так как направление действия силы давления противоположно направлению перемещения. Получаем:

$$A = P_0\,S\,x\,.$$

Выразим работу A через начальную и конечную температуры газа. Для этого воспользуемся уравнением состояния:

$$P_1\,V_1 = \nu\,R\,T_1\,,$$

$$P_0\,(\,V_1 + S\,x\,) = \nu\,R\,T_2 \quad\longrightarrow\quad P_0\,V_1 + A = \nu\,R\,T_2\,.$$

Полагая в первом уравнении $P_1 = k\,P_0$, получаем:

$$P_0\,V_1 = \frac{\nu\,R\,T_1}{k}\,, \qquad A = \nu\,R\,T_2 - \frac{\nu\,R\,T_1}{k}\,.$$

Подставляя этот результат в уравнение первого начала термодинамики, находим конечную температуру газа:

$$0 = \nu\, C_V\, T_2 - \nu\, C_V\, T_1 + \nu\, R\, T_2 - \frac{\nu\, R\, T_1}{k} \quad \longrightarrow \quad T_2 = T_1\, \frac{k\, C_V + R}{k\, C_P}\,,$$

$C_P = C_V + R$ — молярная теплоёмкость при постоянном давлении.

2. Для того чтобы найти приращение объёма газа, воспользуемся найденными выше выражениями для работы A:

$$\Delta\, V = S\, x = \frac{A}{P_0} = \frac{\nu\, R}{P_0} \left(T_2 - \frac{T_1}{k} \right).$$

Отношение $\Delta\, V/V_1$ равно:

$$\frac{\Delta\, V}{V_1} = \frac{\nu\, R}{P_0\, V_1} \left(T_2 - \frac{T_1}{k} \right) = \frac{k}{T_1} \left(T_2 - \frac{T_1}{k} \right) = \frac{k\, T_2}{T_1} - 1\,.$$

Используя выражение для T_2, этот результат можно привести к следующему виду:

$$\frac{\Delta\, V}{V_1} = \frac{k-1}{\gamma}\,,$$

$\gamma = C_P/C_V$ — показатель адиабаты.

Упростим полученные формулы для одноатомного газа. В этом случае $C_V = 3\,R/2$, $C_P = 5\,R/2$, $\gamma = 5/3$,

$$T_2 = T_1\, \frac{3\,k+2}{5\,k} = 210\ \text{K}\,, \qquad \frac{\Delta\, V}{V_1} = \frac{3\,(\,k-1\,)}{5} = 1{,}8\,.$$

Следует отметить, что в данной задаче нельзя пользоваться уравнением адиабаты, поскольку рассматриваемый процесс является необратимым. Вычислим конечную температуру газа T_2, следуя этому уравнению:

$$P\, V^{\,\gamma} = \text{const}\,, \qquad \frac{T^{\,\gamma}}{P^{\,\gamma-1}} = \text{const}\,, \qquad \frac{T}{P^{\,\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \text{const}\,,$$

$$\frac{T_2}{P_0^{\,\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \frac{T_1}{P_1^{\,\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad \longrightarrow \quad T_2 = T_1 \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T_1}{k^{\,\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\,.$$

Для одноатомного газа получаем:

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{2}{5}\,, \qquad T_2 = \frac{300}{4^{\,2/5}} = 172\ \text{K}\,.$$

Это значение заметно отличается от правильного значения 210 K.

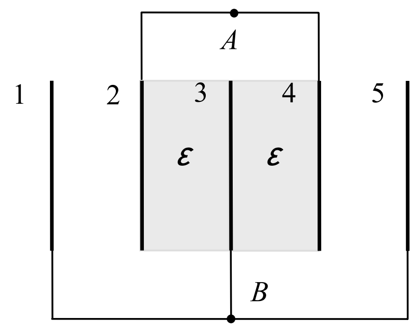
Ответ:

$$T_2 = T_1\, \frac{3\,k+2}{5\,k} = 210\ \text{K}\,, \qquad \frac{\Delta\, V}{V_1} = \frac{3\,(\,k-1\,)}{5} = 1{,}8\,.$$

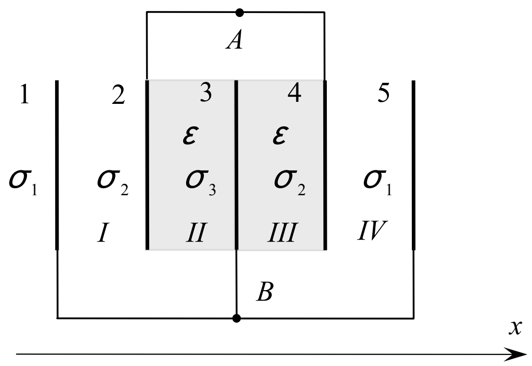
Критерии

1. Правильно записано уравнение первого начала термодинамики для газа (+2 балла).
2. Правильно записано уравнение баланса энергии для поршня (+1 балл).
3. Получена правильная связь работы газа с перемещением поршня (+1 балл).
4. Правильно записано уравнение состояния газа для начального и конечного положений поршня (+1 балл).
5. Получена правильная связь работы газа с начальной и конечной температурами (+2 балла).
6. Получены правильные буквенный и числовой ответы для конечной температуры газа (+1 балл).
7. Получены правильные буквенный и числовой ответы для относительного приращения объёма газа (+2 балла).

Задача 4. Конденсатор состоит из пяти одинаковых тонких металлических пластин, расположенных параллельно друг другу на равных расстояниях. Пластины 2 и 4 соединены тонким проводом и образуют одну из обкладок конденсатора. Другая обкладка — пластины 1, 3 и 5, также соединённые проводом. Всё пространство между пластинами 2, 3 и 4 заполнено твёрдым однородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 4$. Конденсатор подключён к батарее за точки A и B. Найдите отношения q_1 / q_2 и q_3 / q_2, где q_1, q_2 и q_3 — заряды пластин 1, 2 и 3. Краевые эффекты не учитывайте.



Возможное решение



Пусть положительный полюс батареи подключён к точке A, а отрицательный к точке B. Обозначим через q суммарный заряд пластин 2 и 4. Тогда суммарный заряд пластин 1, 3 и 5 равен $-q$. В силу зеркальной симметрии конденсатора относительно пластины 3 заряды пластин 2 и 4 совпадают. Заряды пластин 1 и 5 также одинаковы. Имеем равенства:

$$q_2 = q_4 = \frac{q}{2}\,, \qquad 2\,q_1 + q_3 = -q\,.$$

Вводя поверхностные плотности заряда на пластинах, получаем:

$$\sigma_2 = \sigma_4 = \frac{\sigma}{2}\,, \qquad 2\,\sigma_1 + \sigma_3 = -\sigma\,, \qquad \sigma = \frac{q}{S}\,,$$

S — площадь пластин. Обозначим римскими цифрами $I - IV$ области между пластинами. Направим ось x от пластины 1 к пластине 5 и рассмотрим проекцию вектора напряжённости электрического поля на эту ось в четырёх областях:

$$E_I = \frac{1}{2\,\varepsilon_0}\,(\,\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1\,) = -\frac{1}{2\,\varepsilon_0}\,(\,2\,\sigma_2 + \sigma_3\,) = -\frac{1}{2\,\varepsilon_0}\,(\,\sigma + \sigma_3\,)\,,$$

$$E_{II} = \frac{1}{2\,\varepsilon_0\,\varepsilon}\,(\,\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1\,) = -\frac{\sigma_3}{2\,\varepsilon_0\,\varepsilon}\,,$$

$$E_{III} = \frac{1}{2\,\varepsilon_0\,\varepsilon}\,(\,\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1\,) = \frac{\sigma_3}{2\,\varepsilon_0\,\varepsilon}\,,$$

$$E_{IV} = \frac{1}{2\,\varepsilon_0}\,(\,\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_2 - \sigma_1\,) = \frac{1}{2\,\varepsilon_0}\,(\,\sigma + \sigma_3\,)\,,$$

ε_0 — электрическая постоянная.

Пластины 2 и 4 образуют положительную обкладку конденсатора. Поэтому разность потенциалов между ними должна равняться нулю. Это условие автоматически выполняется в силу равенства $E_{II} = -E_{III}$:

$$\varphi_2 - \varphi_4 = E_{II}\, d + E_{III}\, d = 0\,,$$

d — расстояние между пластинами. Рассмотрим разность потенциалов между пластинами 1 и 3. Она также должна равняться нулю, так как эти пластины являются частями отрицательной обкладки. Имеем:

$$\varphi_1 - \varphi_3 = E_I\, d + E_{II}\, d = 0 \quad \longrightarrow \quad E_I + E_{II} = 0\,, \qquad -\sigma - \sigma_3 - \frac{\sigma_3}{\varepsilon} = 0\,, \qquad \sigma_3 = -\frac{\sigma\,\varepsilon}{\varepsilon + 1}\,.$$

Для плотности σ_1 получаем:

$$2\,\sigma_1 + \sigma_3 = -\sigma \quad \longrightarrow \quad \sigma_1 = -\frac{\sigma + \sigma_3}{2} = -\frac{\sigma}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}\right) = -\frac{\sigma}{2\,(\,\varepsilon + 1\,)}\,.$$

Отношения зарядов пластин равны:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = -\frac{1}{\varepsilon + 1} = -0{,}2\,, \qquad \frac{q_3}{q_2} = \frac{\sigma_3}{\sigma_2} = -\frac{2\,\varepsilon}{\varepsilon + 1} = -1{,}6\,.$$

Ответ:

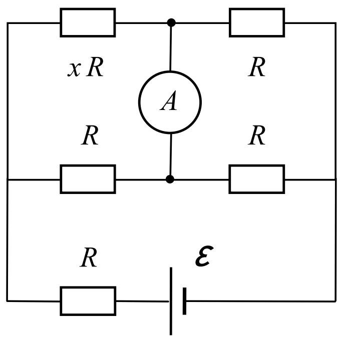
$$\frac{q_1}{q_2} = -\frac{1}{\varepsilon + 1} = -0{,}2\,, \qquad \frac{q_3}{q_2} = -\frac{2\,\varepsilon}{\varepsilon + 1} = -1{,}6\,.$$

Критерии

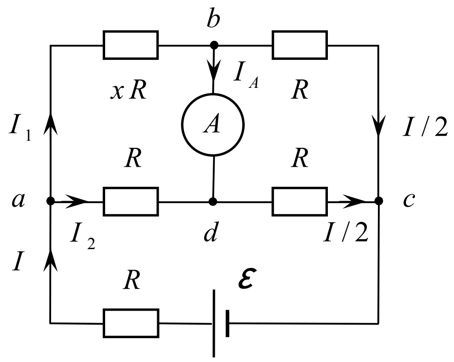
1. На основе симметрии конденсатора получены правильные уравнения для зарядовых плотностей (+2 балла).
2. Правильно записаны напряжённости электрического поля в областях между пластинами (+3 балла).
3. Указано, что разность потенциалов между пластинами 1 и 3 равна нулю (+1 балл).
4. Правильно вычислена разность потенциалов между пластинами 1 и 3 и получено дополнительное уравнение для зарядовых плотностей (+2 балла).
5. Получены правильные буквенные и числовые ответы для зарядовых плотностей и отношений зарядов пластин (+2 балла).

Задача 5. Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС $\varepsilon = 12$ В, идеального амперметра, четырёх одинаковых сопротивлений $R = 40$ Ом и переменного сопротивления $x\,R$. Пренебрегая внутренним сопротивлением батареи, найдите следующие величины:

1. Значение x, при котором тепловая мощность, выделяющаяся на сопротивлении $x\,R$, максимальна.
2. Максимальную тепловую мощность P_m, выделяющуюся на сопротивлении $x\,R$.
3. Силу тока I_A, текущего через амперметр при найденном значении x. Числовое значение силы тока выразите в миллиамперах.



Возможное решение



1. Обозначим узлы схемы буквами a, b, c и d. Так как сопротивление амперметра равно нулю, потенциалы точек b и d совпадают. Поэтому эти точки можно стянуть в одну. Тогда общее сопротиление цепи равно:

$$R_0 = R + \frac{x\,R\cdot R}{x\,R + R} + \frac{R\cdot R}{R+R} = R + \frac{x\,R}{x+1} + \frac{R}{2} = R\left(\frac{3}{2} + \frac{x}{x+1}\right) = R\,\frac{5\,x+3}{2\,(\,x+1\,)}\,.$$

Для силы тока I, текущего через батарею, получаем:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_0} = \frac{\varepsilon}{R}\cdot\frac{2\,(\,x+1\,)}{5\,x+3}\,.$$

Обозначим через I_1 и I_2 силы токов на участках ab и ad. В узле a имеем:

$$I_1 + I_2 = I\,.$$

Приравнивая напряжения на этих участках, получаем:

$$I_1\,x\,R = I_2\,R\,.$$

Отсюда находим силу тока I_1:

$$I_2 = x\,I_1\,, \qquad I_1 + x\,I_1 = I \quad\longrightarrow\quad I_1 = \frac{I}{x+1} = \frac{2\,\varepsilon}{R\,(\,5\,x+3\,)}\,.$$

Тепловая мощность, выделяющаяся на сопротивлении xR, равна:

$$P = I_1^2\, xR = \frac{4\,\varepsilon^2\, x}{R\,(\,5\,x + 3\,)^2}\,.$$

2. Для того чтобы найти максимальную мощность, преобразуем последнее выражение:

$$P = \frac{4\,\varepsilon^2}{5\,R} \cdot \frac{5\,x + 3 - 3}{(\,5\,x + 3\,)^2} = \frac{4\,\varepsilon^2}{5\,R} \left(\frac{1}{5\,x + 3} - \frac{3}{(\,5\,x + 3\,)^2} \right)\,.$$

Введём новую переменную y:

$$y = \frac{1}{5\,x + 3}\,.$$

Мощность представляется квадратным трёхчленом относительно этой переменной:

$$P = \frac{4\,\varepsilon^2}{5\,R} \cdot (\,y - 3\,y^2\,)$$

Максимум мощности достигается при $y = 1/6$. Найдём соответствующее значение x:

$$\frac{1}{5\,x + 3} = \frac{1}{6}\,, \qquad 5\,x + 3 = 6\,, \qquad x = \frac{3}{5}\,.$$

Максимальная мощность равна:

$$P_m = \frac{4\,\varepsilon^2}{5\,R} \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{36} \right) = \frac{\varepsilon^2}{15\,R} = 0{,}24 \text{ Вт}\,.$$

3. Найдём теперь силу тока I_A, текущего через амперметр. При $x = 3/5$ имеем:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \cdot \frac{2\,(\,x + 1\,)}{5\,x + 3} = \frac{8\,\varepsilon}{15\,R}\,, \qquad I_1 = \frac{I}{x + 1} = \frac{\varepsilon}{3\,R}\,.$$

Так как напряжения на участках bc и dc совпадают, по этим участкам текут одинаковые токи $I/2$. В узле b имеем:

$$I_1 = I_A + \frac{I}{2} \quad \longrightarrow \quad I_A = I_1 - \frac{I}{2} = \frac{\varepsilon}{3\,R} - \frac{4\,\varepsilon}{15\,R} = \frac{\varepsilon}{15\,R} = 20 \text{ мА}\,.$$

Ток через амперметр течёт в направлении от узла b к узлу d.

Ответ:

$$x = \frac{3}{5}\,, \qquad P_m = \frac{\varepsilon^2}{15\,R} = 0{,}24 \text{ Вт}\,, \qquad I_A = \frac{\varepsilon}{15\,R} = 20 \text{ мА}\,.$$

Критерии

1. Указано, что точки, между которыми включён амперметр, можно стянуть в одну точку (+2 балла).
2. Правильно вычислено общее сопротивление цепи (+1 балл).
3. Правильно найдена сила тока, текущего через батарею (+1 балл).
4. Правильно найдена сила тока, текущего через сопротивление $x\,R$ (+1 балл).
5. Правильно найдена тепловая мощность, выделяющаяся на сопротивлении $x\,R$ (+1 балл).
6. Правильно найдено значение x, при котором тепловая мощность максимальна (+2 балла).
7. Получены правильные буквенный и числовой ответы для максимальной мощности (+1 балл).
8. Получены правильные буквенный и числовой ответы для силы тока, текущего через амперметр (+1 балл).