Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2025

Заключительный этап 24 марта

6 класс

Задача 6.1. На столе выложены восемь карточек-цифр:

$$\boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{5}$$

Используя в записи только однозначные и двузначные числа расположите все карточки в нужном порядке и расставьте знаки действий $(+, -, \times, \div)$ и скобки между ними, чтобы в результате действий получилось 2025.

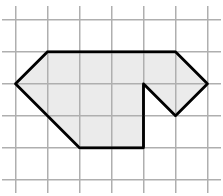
Ответ: $(2 \div 2 + 40 \times 2 + 0) \times 25 = 2025$

Критерии

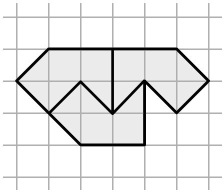
Любой корректный приведенный пример, удовлетворяющий условиям задач, оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого примера используются следующие критерии:

- 1 б. Приведен корректный способ расстановки знаков действий и скобок, но с использованием 3-х значных чисел (при этом четырёхзначные числа не используются).
- 0 б. Во всех остальных случаях.

Задача 6.2. Разрежьте данную фигуру на клетчатой сетке на три равные части.



Решение.



Критерии

- 7 б. Верный рисунок.
- 0 б. Во всех остальных случаях.

Задача 6.3. В алфавите племени АМУ-АМУ всего три буквы, А, М, У. Смысл слова в языке племени не меняется, если в любое место слова вставить сочетание МАМА или МУУ, либо вычеркнуть сочетание АМ или МУМ. Можно ли утверждать, что слова МАУМАУ и УММА несут одинаковый смысл?

Ответ: Да

Решение. Заметим, что операции +МАМА и –АМ не меняют разность между количеством гласных и согласных букв в слове, а +МУУ и –МУМ увеличивает разность между гласными и согласными на 1. Так как в слове УММА гласных и согласных поровну, а в слове МАУМАУ гласных на 2 больше, то операцию +МУУ или –МУМ суммарно можно использовать ровно два раза.

Ориентируясь на это соображение, покажем, как можно преобразовать слово УММА в МАУМАУ:

УММА

МАМАУММА**МУУ**

МАМАУММАМУ**МАМА**У

МАМАУММАМУМАМАУ

МАУММУМАУ

МАУМАУ

Критерии

Любой корректный приведенный пример перевода слова УММА в слово МАУМАУ оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого примера используются следующие критерии (баллы суммируются):

- 1 б. Замечено, что при любых операциях со словом, описанных в условии, разность между количеством гласных и согласных букв либо не меняется, либо увеличивается на 1.
- 1 б. Замечено, что в слове УММА равное количество гласных и согласных, а в слове МАУМАУ гласных на две больше, и следовательно, можно применять операцию +МУУ или –МУМ ровно два раза.

Задача 6.4. Аня и Боря играют в такую игру. У каждого изначально куча из 100 камней. Первая ходит Аня и убирает 1 камень из любой кучи. Каждый следующий игрок должен убрать из одной кучи (на его усмотрение) в два раза больше камней, чем убрал игрок в предыдущем ходу. Игра заканчивается, когда нельзя сделать ход, выигрывает тот, у кого останется больше камней. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Боря

Решение. Так как ходы чередуются, а количество убираемых камней с каждым ходом увеличивается вдвое, то это количество определено заранее и чередуется между Аней и Борей: 1, 2, 4, 8, 16, 32 или 64 камня. Следующее значение 128 уже никогда не используется, так как камней изначально меньше.

Правильная стратегия Бори заключается в том, чтобы последним ходом Аня взяла 64 камня из своей кучи, оставив в куче Бори больше камней. Для этого Боря может каждый ход убирать камни из своей кучи — тогда после хода в 32 камня у Бори останется не более, чем $100-(2+8+32) = 58$ камней. При этом у Ани останется не менее $100-(1+4+16) = 79$ камней, а значит, следующим ходом Аня будет вынуждена забрать 64 камня из своей кучи и игра завершится с победой Бори.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 2 б. Присутствует здравая идея, что проигрывает тот, у кого последним ходом забирают из кучи 64 камня, но решение не доведено до конца.

- 0 б. Правильный ответ без доказательства.

Задача 6.5. На острове два лагеря жителей: рыцарей, всегда говорящих правду, и лжецов, всегда говорящих неправду. Однажды на острове построили кинотеатр с прямоугольным залом на 32 места (4 ряда по 8 мест). На премьере побывали 32 жителя, заняв все места в зале, причем каждый из них заявил, что среди соседей были представители обоих лагерей (два зрителя являются соседями, если один из них сидит слева, справа, сзади или спереди от другого). Какое наименьшее число лжецов могло быть среди зрителей на этой премьере?

Ответ: 8

Решение. Заметим, что среди соседей рыцаря обязательно был лжец. Значит, каждое место в кинотеатре либо было занято лжецом, либо является соседним к одному из лжецов. Назовем такие места (включая место лжеца) *близкими* к лжецу. У каждого лжеца может быть не более 5 близких мест.

Пусть на премьере находилось наименьшее возможное количество лжецов. Так как $6 \cdot 5 = 30 < 32$, то лжецов не менее 7.

Рассмотрим места по периметру кинотеатра (таких мест 20). У лжеца не может быть более 3-х близких мест по периметру, причем, если сам лжец не сидит с краю, то таких мест не более 2-х. Так как $5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 19 < 20$, то по периметру сидит не менее 6 лжецов. Но для каждого лжеца, сидящего по периметру, всего приходится не более 4 близких мест. Так как $6 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 29 < 32$, то всего лжецов не может быть меньше 8.

Пример возможной рассадки лжецов на премьере показан на рисунке (все неотмеченные места заняты рыцарями).

	Л				Л		
			Л				Л
Л				Л			
		Л				Л	

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии (баллы суммируются):

- 2 б. Есть корректный пример на 8 лжецов, но доказательство неполное или отсутствует.
- 1 б. Есть обоснованная оценка, что лжецов не менее 7.

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2025

Заключительный этап   24 марта

7 класс

Задача 7.1. Дано число $\frac{5}{99}$. Его разложили в бесконечную десятичную дробь, а затем перед каждой цифрой после запятой дописали цифру 2. Запишите получившееся число в виде несократимой рациональной дроби.

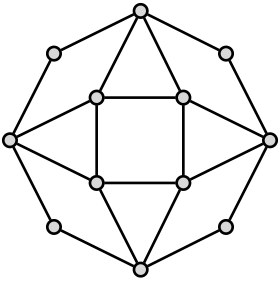
Решение. Заметим, что $5/99 = 0{,}050505\ldots$, поэтому после добавления двоек число станет равно $x = 0{,}20252025\ldots$. Тогда $10000x = 2025{,}2025\ldots = 2025 + x$, откуда $x = 2025/9999 = 225/1111$.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 3 б. Все шаги решения правильные, но ответ неверен из-за вычислительной ошибки.
- 1 б. Правильно записана десятичная дробь $0{,}20252025\ldots$, других продвижений нет.

Задача 7.2. На рисунке представлен план замка. Точки это башни замка, отрезки это стены замка. Сколькими способами можно назначить стражников на патрулирование этого замка так, чтоб маршрут каждого стражника был замкнут, проходил по одной стене не более одного раза и чтоб по каждой стене проходил ровно один маршрут?



Ответ: 6561.

Решение. Рассмотрим башню, из которой выходит две стены. Её можно удалить и соединить эти две стены в одну, никак не изменив ответ на задачу.

Рассмотрим башню, из которой выходит 4 стены. Существует ровно три способа разбить эти 4 стены на две пары, состоящие в одном маршруте.

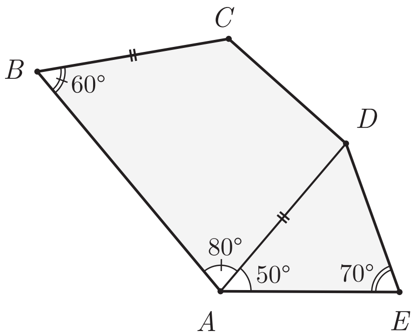
Башен, из которых исходит 4 стены, ровно 8. Поэтому искомых способов построить маршруты будет ровно $3^8 = 6561$.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Если решение верное, но допущены арифметические ошибки.
- 1 б. Есть разумное соображение про то, что вершину степени два можно заменить на сплошную стену, но дальнейших продвижений нет.
- 0 б. Присутствует правильный ответ без наличия правильного решения.

Задача 7.3. В пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $BC = AD$, $\angle ABC = 60°$, $\angle AED = 70°$, $\angle BAD = 80°$, $\angle EAD = 50°$. Докажите, что $AB+AD = CE+DE$.



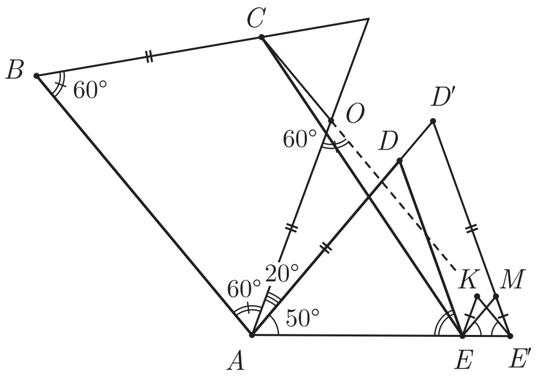
Решение. Докажем, что в действительности равенство $AB+AD = CE+DE$ никогда не выполняется и верно неравенство $AB + AD > CE + DE$.

Построим такую точку O, что $\angle OAB = 60°$, $AO = BC$. Тогда нетрудно получить, что $\angle AOC = 120°$ и $AO + CO = AB$ (это можно увидеть, если достроить четырёхугольник $ABCO$ до правильного треугольника).

Построим также дополнительный отрезок $E'D'$, параллельный ED, таким образом, что точка E' — пересечение прямых CO и AE, а точка D' — лежит на продолжении AD. Тогда $\angle D'E'A == 70° = \angle OAE$, $\angle D'AE' = 50° = \angle OE'A$. Треугольники $D'AE'$ и $OE'A$ равны по общей стороне и двум прилежащим углам.

Отметим на отрезках $E'D'$ и $E'O$ точки M и K соответственно так, что $\angle MEE' = 50°$, $\angle KEE' = 70°$. Тогда треугольники MEE' и $KE'E$ также равны по общей стороне и двум прилежащим углам.

Также нетрудно проверить, используя равенство соответствующих углов, что будут равны треугольники MED и $DD'M$.



Запишем теперь:

$$AB + AD = (AO + CO) + AD \qquad (1)$$

$$\text{и } CE + ED < (CK + KE) + ED = CK + KE + MD' \qquad (2)$$

Добавим к правой части (1) и (2) соответственно равные отрезки DD' и KE' и получим равные выражения:

$$(1) + DD' = AO + CO + AD' = AO + CO + OE' = AO + CE'$$

$$(2) + KE' = CE' + KE + MD' = CE' + E'M + MD' = CE' + E'D'$$

Значит, $AB + AD = (1) = (2) > CE + ED$.

Критерии

Любое полное доказательство невозможности требуемого равенства оценивается в 7 баллов.

Задача 7.4. Натуральные числа a и b таковы, что $a^2 - b^3 = ab$. Докажите, что число b является произведением двух последовательных натуральных чисел.

Решение. Запишем равенство в виде $(a - b)a = b^3$. Докажем, что a делится на b. Пусть $a = p^\alpha \cdot \ldots$ и $b = p^\beta \cdot \ldots$, где p — простое. Достаточно доказать, что $\alpha \geqslant \beta$. Предположим, что $\alpha < \beta$. Тогда в левую часть простое число p входит в степени 2α, а в правую — в степени 3β. Тогда $\alpha = 3\beta/2 > \beta$ — противоречие.

Разделим тогда наше равенство на b^2. Получаем, что $a/b = n$ — натуральное и $(n - 1)n = b$, что и требовалось доказать.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 3 б. Получено решение, в котором использовано, но не доказано утверждение о том, что a делится на b.
- 2 б. Доказано, что a делится на b, других продвижений нет.

Задача 7.5. Вася закрашивает некоторые клетки таблицы 6 на 6 в виде «змейки»: каждая следующая закрашиваемая клетка соседствует по стороне с предыдущей закрашенной клеткой, но при этом не соседствует ни с одной другой ранее закрашенной клеткой. Змейку какой наибольшей длины может таким образом нарисовать Вася?

Ответ: 24

2	3	4	5	6	7
1					8
	13	12	11	10	9
15	14				
16		20	21	22	23
17	18	19			24

Решение. Пример змейки в 24 клетки приведен на рисунке. Докажем, что змейка не может иметь большую длину.

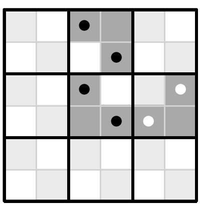
Разобьем все поле на 9 квадратов 2×2. Тогда в каждом таком квадрате помещается не более 3-х клеток змейки. Докажем, среди этих квадратов не может быть больше 6 квадратов, содержащих ровно 3 клетки змейки (назовем эти три клетки «уголком»). Это даст необходимую оценку $6 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 24$.

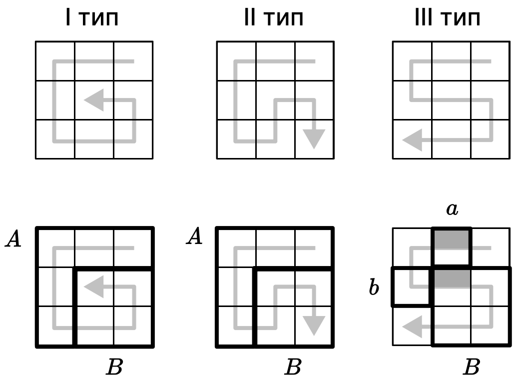
Мысленно применим шахматную раскраску клеток таблицы. Заметим, что если два соседних квадрата 2×2 содержат уголки, то диагональные клетки в уголках противоположны по цвету, если змейка переходит из одного квадрата в другой, и одинаковые — наоборот, если не переходит.

Без ограничения общности можно считать, что змейка обходит квадраты 2×2 по одному из трех маршрутов на рисунке (с точностью до симметрии и поворотов таблицы). Это не дает точное представление о форме змейки, однако позволяет оценить количество уголков.

Выделим в таблице часть A и часть B. Рассмотрим типы I и II. Часть B не может содержать более 3-х уголков (в противном случае цвета диагональных клеток уголков чередуются и замыкают змейку). Часть A не может содержать 5 уголков. Если A содержит 4 уголка, то тогда в части B верхние два квадрата не могут содержать уголки, и тогда уголков в части B не больше уже не больше 2-х. То есть в сумме при маршруте первых двух типов не может быть больше 6 уголков.

Пусть маршрут имеет тип III. Сколько бы клеток змейки ни было в центральном квадрате (две или три), две из них обязательно граничат либо с верхним либо с нижним квадратом, в котором, соответственно, будет не уголок, а ровно две клетки змейки, как на рисунке в квадрате a — будем считать, что этот квадрат верхний. Тогда в квадрате b не может быть уголка. Так же, как и в случае с первыми типами, часть B не может содержать более 3-х уголков. Значит в сумме снова не больше 6 уголков. Что и требовалось доказать.





Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии (баллы суммируются):

- 2 б. Приведен корректный пример на 24 клетки.
- 1 б. Доказана оценка на 27 клеток (например, использовано рассуждение, что квадрат 2×2 не содержит больше 3 клеток змейки).
- 1 б. Доказана оценка на 26 клеток.
- 1 б. Доказана оценка на 25 клеток.

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2025

Заключительный этап 24 марта

8 класс

Задача 8.1. Маша и Медведь играют в игру. Дана клетчатая полоска из 2024 клеток. Сначала Медведь ставит в любую клетку баночку меда. Затем на каждом ходу Маша называет произвольное натуральное число, не превосходящее n, а Медведь должен передвинуть баночку меда ровно на n клеток, не выходя за пределы полоски. Маша выигрывает, если в какой-то момент Медведь не сможет этого сделать. Найдите наименьшее n, при котором Маша может выиграть.

Ответ: 2024

Решение. Заметим, что если $n \leqslant 2023$, то Медведь всегда сможет сделать ход. Для этого ему нужно поставить баночку меда в самую первую клетку полоски, тогда он сможет переставить ее на любое количество клеток, не превосходящее 2023. Передвигая баночку затем обратно на первую клетку, он будет ходить так бесконечно долго.

Осталось заметить, что при $n = 2024$ Медведь проигрывает, поскольку не может сделать даже один ход: расстояние между крайними клетками полоски равно 2023 клетки, а ему нужно сделать ход на 2024 клетки.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 7 б. Приведён пример наименьшего $n = 2024$.

Задача 8.2. Дана четырехугольная пирамида. На каждой ее грани написано число 0. За один ход разрешается выбрать любую вершину и изменить (т.е. увеличить или уменьшить) числа на всех гранях, содержащих эту вершину, на 1. Можно ли такими операциями добиться, чтобы на всех гранях пирамиды (в том числе и на основании) было бы написано число 2?

Ответ: Можно

Решение. Сделаем три операции: в вершине пирамиды и в двух противоположных вершинах ее основания. Легко видеть, что после этих операций на каждой грани будет написано число 2.

Замечание. Интересно отметить, что получить на каждой грани число 1 невозможно. Для этого обозначим через A число, которое написано на основании пирамиды, а через B — сумму чисел, написанных на боковых гранях. Посмотрим, как изменяются числа A и B, если применить операцию к вершине пирамиды и к вершине основания:

A	A	$A \pm 1$
B	$B \pm 4$	$B \pm 2$

Заметим, что величина $B - 2A$ при этом либо изменяется на 4, либо не изменяется вовсе. В начале она равна 0, а в конце должна равняться 2. Но, двигаясь только с шагом 4, невозможно попасть из 0 в 2.

Критерии

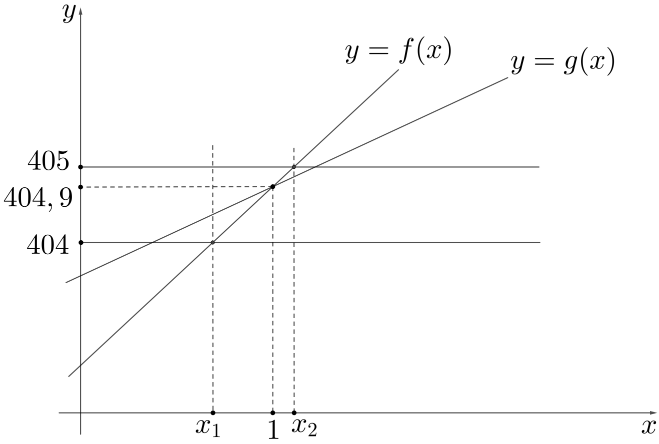
Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В противном случае ставится 0 баллов.

Задача 8.3. Докажите, что множество решений уравнения

$$[202{,}5x + 202{,}4] = [202{,}4x + 202{,}5]$$

содержит интервал длины не менее $2/405$.

Решение. Пусть $f(x) = 202{,}5x + 202{,}4$ и $g(x) = 202{,}4x + 202{,}5$. Заметим, что $x = 1$ является решением нашего уравнения, поскольку $f(1) = g(1) = 404{,}9$. Изобразим на координатной плоскости графики функций f и g. Проведем прямые $y = 404$ и $y = 405$, пересекающие прямую $y = f(x)$ в точках x_1 и x_2 соответственно. Очевидно, любое число из интервала $(x_1; x_2)$ является решением нашего уравнения, поскольку для любого x из этого промежутка $[202{,}5x + 202{,}4] = [202{,}4x + 202{,}5] = 404$.



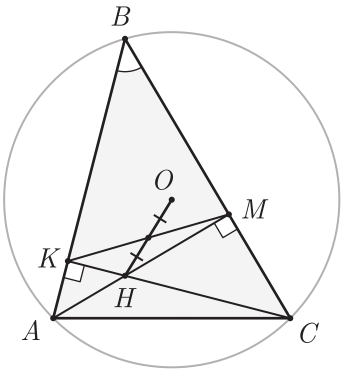
Вычислим x_1 и x_2: $x_1 = \dfrac{404 - 202{,}4}{202{,}5}$ и $x_2 = \dfrac{405 - 202{,}4}{202{,}5}$. Ясно, что $x_2 - x_1 = \dfrac{1}{202{,}5} = \dfrac{2}{405}$,что и требовалось.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

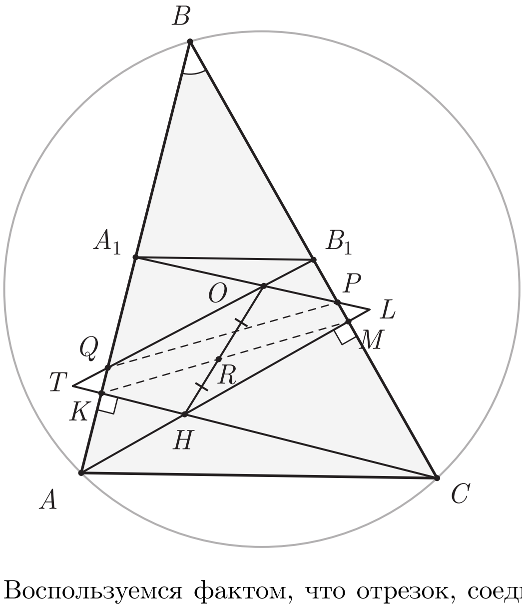
- 4 б. Все шаги решения правильные, но доказательство неверно из-за вычислительной ошибки.
- 2 б. В решении доказано, что множество решений уравнения содержит интервал (например, рассуждением, что в малой окрестности точки $x = 1$ равенство остается справедливым), но длина интервала меньше требуемой или не вычислена вовсе.
- 0 б. Написаны какие-то отдельные оценки на решения уравнения или приведены отдельные решения.

Задача 8.4. Треугольник ABC вписали в окружность с центром O. Его высоты AM и CK пересекаются в точке H. Оказалось, что прямая MK делит отрезок OH пополам. Чему может быть равен угол ABC?



Ответ: 45° или 135°.

Решение. Из середин A_1 и B_1 соответственно сторон AB и BC проведем серединные перпендикуляры A_1P и B_1Q до пересечения с другими сторонами в точках P и Q соответственно.



Воспользуемся фактом, что отрезок, соединяющий основания двух высот треугольника, отсекает от него соответствующим образом подобный треугольник (это нетрудно показать из равенства углов исходного и отсекаемого треугольника). Тогда треугольник A_1BB_1 подобен треугольнику PBQ, а треугольник MBK подобен треугольнику ABC.

Так как A_1C_1 — средняя линия треугольника ABC, то треугольники A_1BC_1 и ABC подобны. Следовательно, треугольники PBQ и MBK тоже подобны, и $PQ \parallel KM$.

Пусть $(AM) \cap (OP) = L$, $(OQ) \cap (CK) = T$. Тогда четырёхугольник $TOLH$ — параллелограмм. Так как R — середина OH, то R — центр этого параллелограмма. Значит, KM совпадает с PQ.

Так как вершина M лежит на серединном перпендикуляре к AB, то треугольник AMB равнобедренный с углом $ABM = 45°$. Если в изначальном треугольнике угол ABC острый, то он равен углу ABM, то есть $45°$. Если же угол ABC тупой, то он равен $180° - \angle ABM = 135°$.

Замечание. Задачу можно решить через окружность 9 точек. Тогда ее центр лежит на KM и ортотреугольник тогда будет прямоугольным. Отсюда получаем те же ответы.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 4 б. Присутствует полное решение, но только для случая острого угла B.
- 2 б. Присутствует рассуждение с опорой на то, что отрезки QP и KM совпадают, без доказательства с разбором обоих случаем.
- 1 б. Присутствует рассуждение с опорой на то, что отрезки QP и KM совпадают, без доказательства с разбором одного случая.

Задача 8.5. Натуральные числа a и b таковы, что $a^3 - b^4 = ab^2$. Докажите, что число b является произведением трех последовательных натуральных чисел.

Решение. Запишем равенство в виде $(a-b)a(a+b) = b^4$. Докажем, что a делится на b. Пусть $a = p^\alpha \cdot \ldots$ и $b = p^\beta \cdot \ldots$, где p — простое. Достаточно доказать, что $\alpha \geqslant \beta$. Предположим, что $\alpha < \beta$. Тогда в левую часть простое число p входит в степени 3α, а в правую — в степени 4β. Тогда $\alpha = 4\beta/3 > \beta$ — противоречие.

Разделим тогда наше равенство на b^3. Получаем, что $a/b = n$ — натуральное и $(n-1)n(n+1) = b$, что и требовалось доказать.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 3 б. Получено решение, в котором использовано, но не доказано утверждение о том, что a делится на b.
- 2 б. Доказано, что a делится на b, других продвижений нет.

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2025

Заключительный этап 24 марта

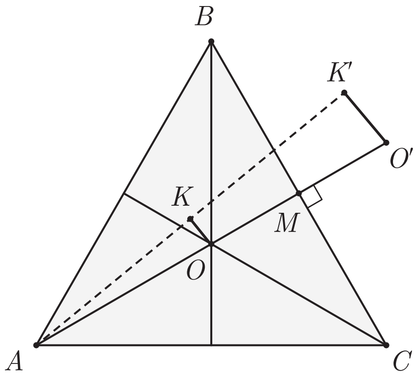
9 класс

Задача 9.1. узнечик сидит в вершине правильного треугольника со стороной 1. Каждый ход кузнечик выбирает одну из вершин треугольника и прыгает в направлении к ней, уменьшая расстояние до этой вершины вдвое. Может ли кузнечик за несколько прыжков оказаться ближе, чем на 0,1 от точки пересечения медиан треугольника?

Ответ: Нет.

Решение. Рассмотрим обратный ход. Пусть кузнечик смог в конце оказаться в точке K, находящейся на расстоянии меньшем, чем 0,1 от точки пересечения медиан O. И пусть его последний прыжок из точки K' в точку K был в направлении вершины треугольника A. Тогда по условию задачи $AK' = 2AK$.

Продлим медиану AM до точки O' так, что точка O' окажется на расстоянии $AO' = 2AO$. Тогда треугольники $AK'O'$ и AKO подобны с коэффициентом 2 и $K'O' = 2KO < 0{,}2$. Но длина перпендикуляра $O'M$ от точки O' до стороны BC равно $\frac{1}{3}AM = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0{,}2$, так что точка K' не может быть внутри треугольника ABC. Противоречие, значит, кузнечик не мог оказаться в точке K, и не мог оказаться ближе 0,2 к точке O.



Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии (критерии суммируются):

- 2 б. Рассмотрена идея обратного хода с попыткой выяснить, из какой точки кузнечик мог прыгнуть и оказаться близко к центру треугольника.
- 1 б. Есть рассуждение в правильном направлении о том, что кузнечик на предыдущем ходе не может находиться внутри треугольника, но доказательство частичное или нет должного обоснования.

Задача 9.2. читель написал на доске приведённое квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ с целыми коэффициентами. Ученик Петя находит корни этого уравнения. Если оба корня окажутся целыми, то учитель составляет новое уравнение такого же типа, у которого вместо p и q стоят эти корни в том порядке, в каком захочет учитель. Если корни не целые или их нет вовсе, то Петя идет домой. Учитель очень хочет, чтобы Петя не попал домой никогда. При каких значениях p и q ему это удастся?

Ответ: $p = 1$, $q = -2$ и $q = 0$, — любое.

Решение. Уравнение $x^2+x-2 = 0$ имеет корни 1 и -2, которые учительница может именно в таком порядке подставить вместо p и q, получив то же самое уравнение. Уравнение $x^2 + px = 0$ имеет корни $-p$ и 0, что позволяет получить уравнение $x^2 - px = 0$ с корнями 0 и p. Далее снова выписывается уравнение $x^2 + px = 0$ и процесс зацикливается.

Докажем, что другие трёхчлены не годятся. Рассмотрим величину q^2+p^2. На следующем шаге она переходит в величину $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$, что меньше $q^2 + p^2$, если целое число q отлично от 0, -1, -2. Многочлены с такими коэффициентами, имеющие целые корни это: $x^2+px = 0$, $x^2+x-2 = 0$ и $x^2-1 = 0$. Но ясно, что эти многочлены могут получиться только, если на предыдущем шаге были уравнения всё того же вида $x^2 + px = 0$, и $x^2 + x - 2 = 0$. Значит, если начальные трёхчлены были не такими, то они и не появятся. Тогда ясно, что натуральное число $q^2 + p^2$ всё время убывает. Это значит, что когда-нибудь процесс закончится, и Петя пойдёт домой.

Критерии

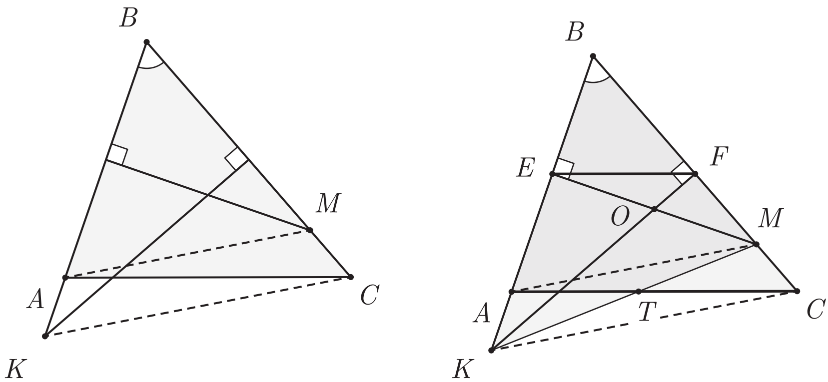
Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 3 б. Доказано, что при всех q, кроме конечного числа, процесс остановится.

- 2 б. Доказано, что пары $(p, 0)$ и $(1, -2)$ подходят, других продвижений нет.
- 1 б. Доказано, что пара $(1, -2)$ подходит, других продвижений нет.
- 1 б. Доказано, что пара $(p, 0)$ подходит, других продвижений нет.

Задача 9.3. ерединные перпендикуляры к сторонам AB и BC треугольника ABC пересекают прямые BC и AB в точках M и K. Оказалось, что прямые AM и CK параллельны. Чему может быть равен угол ABC?

Ответ: 60° или 120°.



Решение. Пусть точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, $\angle ABC = \beta < 90^\circ$. Треугольники EBF и MBK подобны (равны все их углы), следовательно, $\frac{EF}{MK} = \frac{BF}{BK} = \cos\beta$. Отрезок EF — средняя линия в треугольнике, значит, $AC = 2EF$. Тогда $MK = \frac{AC}{2\cos\beta}$ при $\beta < 90^\circ$ и $MK = \frac{-AC}{2\cos\beta}$ при $\beta > 90^\circ$.

Треугольники ABC и MBK подобны, так как $AM \parallel CK$. Площади маленьких треугольников AKT и CMT равны из трапеции $AKCM$. Значит, равны площади больших треугольников ABC и MBK, а, значит, равны и сами треугольники. Тогда $\frac{AC}{2|\cos\beta|} = AC$, откуда $|\cos\beta| = \frac{1}{2}$. Следовательно, β принимает значение 60° или 120°.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии (критерии суммируются):

- 1 б. Замечено подобие треугольников EBF и MBK и связь отрезков EF, MK и угла β.

- 1 б. Замечено подобие треугольников ABC и MBK.

- 1 б. Доказано, что треугольники ABC и MBK равны.

- 1 б. Верно найдено одно из значений искомого угла β.

Задача 9.4. азовем набор положительных вещественных чисел $(a_1, \ldots, a_k)$ *волшебным*, если уравнение $[a_1 n] + [a_2 n] + \ldots + [a_k n] = n$ имеет бесконечно много натуральных решений. Докажите, что набор является волшебным тогда и только тогда, когда $a_1 + \ldots + a_k = 1$ и все a_i — положительные рациональные числа.

Решение. Заметим, что $n = [a_1 n] + [a_2 n] + \ldots + [a_k n] \leqslant a_1 n + a_2 n + \ldots + a_k n$, откуда $a_1 + \ldots + a_k \geqslant 1$. Пусть $a_1 + \ldots + a_k = 1 + t$, где $t \geqslant 0$ — некоторое вещественное число. Тогда $n + tn = a_1 n + \ldots + a_k n$. Вычитая из этого равенства соотношение $n = [a_1 n] + [a_2 n] + \ldots + [a_k n]$, получаем, что $\{a_1 n\} + \{a_2 n\} + \ldots + \{a_k n\} = nt$. Левая часть находится в промежутке от 0 до k, а правая часть будет больше k при всех достаточно больших n, если только $t \neq 0$. Значит, $t = 0$ и $a_1 + \ldots + a_k = 1$.

Далее, мы замечаем, что $\{a_1 n\} + \{a_2 n\} + \ldots + \{a_k n\} = 0$, откуда получаем, что $a_i n = [a_i n]$ для всех i. Значит, $a_i = [a_i n]/n$ — рациональное число.

Обратно, докажем, что если a_1, …, a_k — положительные рациональные числа с суммой 1, то уравнение $[a_1 n] + [a_2 n] + \ldots + [a_k n] = n$ имеет бесконечно много решений. В самом деле, пусть D — наименьший общий знаменатель чисел a_1, …, a_k. Тогда все числа вида cD, где c — произвольное натуральное число, очевидно, будут решениями.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 2 б. Доказано, что если сумма чисел равна 1, а сами числа положительные рациональные, то набор волшебный.

- 3 б. Доказано, что если набор волшебный, то сумма чисел равна 1, а сами числа положительные рациональные.

- 2 б. Доказано, что если набор волшебный, то сумма чисел равна 1, других продвижений нет.

Задача 9.5. окажите, что для любого натурального $n > 2$ можно расставить числа от 1 до n^2 в клетках таблицы $n \times n$ таким образом, чтобы средние арифметические чисел в каждой строке и каждом столбце были бы натуральными числами.

Решение. Будем рассматривать остатки наших чисел по модулю n. Тогда задача формулируется следующим образом. У нас есть числа 0, 1, $\ldots$, $n-1$, каждого ровно n штук. Нужно расставить эти числа в таблице $n \times n$ так, чтобы сумма чисел в любом ряду (строке или столбце) делилась бы на n.

Если n нечетно, расставим числа так:

0	1	2	$\ldots$	$n-1$
0	1	2	$\ldots$	$n-1$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
0	1	2	$\ldots$	$n-1$

Ясно, что сумма чисел в любом столбце делится на n. В каждой строчке сумма чисел равна $0+1+\ldots+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Поскольку n нечетно, число $\dfrac{n-1}{2}$ целое, а значит, наша сумма делится на n.

В случае $n = 4k$ подходит такая расстановка:

1	$4k-1$	2	$4k-2$	$\ldots$	$2k-1$	$2k+1$	$2k$	$2k$
1	$4k-1$	2	$4k-2$	$\ldots$	$2k-1$	$2k+1$	$2k$	$2k$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
1	$4k-1$	2	$4k-2$	$\ldots$	$2k-1$	$2k+1$	$2k$	$2k$
1	$4k-1$	2	$4k-2$	$\ldots$	$2k-1$	$2k+1$	0	0
1	$4k-1$	2	$4k-2$	$\ldots$	$2k-1$	$2k+1$	0	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
1	$4k-1$	2	$4k-2$	$\ldots$	$2k-1$	$2k+1$	0	0

Вновь видно, что в каждом столбце сумма чисел кратна $4k$, а в каждой строке сумма чисел складывается из пар рядом стоящих чисел, а сумма в каждой паре кратна $4k$.

Наконец, рассмотрим случай $n = 4k+2$. В этом случае конструкция выглядит следующим образом. Рассмотрим следующие блоки:

1	$4k+1$	0	0
$2k$	$2k+2$	0	0
$2k+1$	0	$2k$	1
0	$2k+1$	$2k+2$	$4k+1$

и

x	$4k+2-x$
$4k+2-x$	x

, где $x = 1, \ldots, 4k+1$.

Теперь поставим сначала блок 4×4, а затем будем достраивать к нему каемку из оставшихся блоков. Легко видеть, что в каждом ряду каждого блока сумма чисел делится на $4k+2$, поэтому это же условие будет справедливо и для всей таблицы.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии (баллы за них суммируются):

- 4 б. Доказано, что при $n = 4k+2$ расстановка существует.
- 2 б. Доказано, что при $n = 4k$ расстановка существует.
- 1 б. Доказано, что при нечетном n расстановка существует, других продвижений нет.

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2025

Заключительный этап 24 марта

10 класс

Задача 10.1. Пусть $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Рассматриваются два множества $A = \{p(2), p(3), \ldots, p(2024)\}$ и $B = \{p(2) - 1, p(3) - 1, \ldots, p(2024) - 1\}$. В каком из этих множеств квадратов целых чисел больше?

Ответ: Во втором множестве квадратов на 1 больше.

Решение. Заметим, что $p(x) = (x-1)^2(2x+1)$, а $p(x) - 1 = x^2(2x-3)$. Таким образом, при целом x число $p(x)$ является квадратом целого тогда и только тогда, когда квадратом целого является число $2x+1$, а число $p(x) - 1$ — тогда и только тогда, когда квадратом целого является число $2x - 3$. Первых столько же, сколько нечетных квадратов на отрезке натурального ряда от 5 до 4049, вторых столько же, сколько нечетных квадратов на отрезке натурального ряда от 1 до 4048. Поскольку нечетных квадратов на втором отрезке на 1 больше (из-за 1), то во втором множеств квадратов на 1 больше.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Ответ неверен из-за того, что не учтено число 1 во множестве B.
- 2 б. Приведено верное представление p(x) элементов через произведение для элементов обоих множеств.
- 1 б. Приведено верное представление p(x) элементов через произведение для элементов одного из множеств A или B.
- 1 б. Доказано, что число $p(x)$ является квадратом целого тогда и только тогда, когда квадратом целого является число $2x+1$, а число $p(x) - 1$ — тогда и только тогда, когда квадратом целого является число $2x - 3$.

Задача 10.2. Имеется таблица 4×4, в каждой клетке которой стоит 0 или 1. Каждую минуту с ней проделывается следующая операция: для каждой клетки считается сумма чисел в соседних с ней по сторонам клетках и одновременно в каждой клетке число заменяется на 0, если соответствующая сумма четна, и на 1 — если нет. Докажите, что в течение 6 минут какая-нибудь расстановка повторится дважды.

Решение. Рассмотрим сначала таблицы, в которых стоит только одна единица (назовем такие таблицы *базисными*). Докажем, что для таких таблиц условие задачи выполнено. Это легко сделать прямым перебором. В силу симметрии конструкции этот перебор достаточно провести для таблиц, у которых единица стоит в верхнем левом квадрате 2×2 (даже в верхнем уголке этого квадрата; остальные таблицы получаются из этих подходящим отражением).

1	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

→

0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

→

0	0	1	0
0	0	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0

→

0	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0

→

0	0	1	0
0	0	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0

0	1	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

→

1	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

→

0	1	0	1
0	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

→

1	0	0	0
0	0	0	1
1	0	1	0
0	1	0	0

→

0	1	0	1
0	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

0	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

→

0	1	0	0
1	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	0

→

0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	0	0
0	1	0	0

→

0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0

→

0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	0	0
0	1	0	0

Видно, что для всех базисных таблиц третья позиция совпадает с пятой.

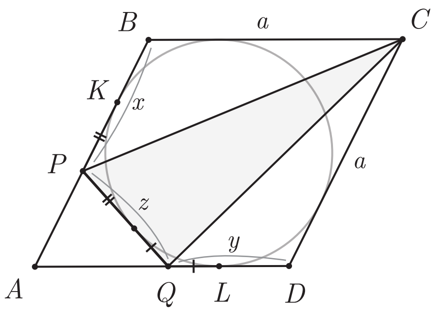
Теперь докажем утверждение для произвольной таблицы. Будем называть *суммой* таблиц таблицу, которая получается сложением чисел по модулю 2 на одинаковых позициях в двух данных таблицах. Заметим, что любая таблица может быть представлена в виде суммы некоторого количества базисных таблиц (мы как будто выбираем базис на множестве таблиц). Кроме того, ясно, что применение операции к исходной таблице дает в точности применение операции к каждой из базисных таблиц, из которых складывается таблица исходная. Поскольку для базисных таблиц третья позиция совпадает с пятой, аналогичное утверждение будет верно и для таблицы исходной, что и требовалось доказать.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Решение в целом верное, но в доказательстве сведения задачи к набору конкретных таблиц присутствуют неточности.
- 1 б. Верно рассмотрен какой-то частный случай таблицы, других продвижений нет.

Задача 10.3. Дан ромб $ABCD$, в который вписана окружность. Точки P и Q выбраны на сторонах AB и AD таким образом, что отрезок PQ касается окружности.
а) Докажите, что площадь треугольника CPQ не зависит от выбора отрезка PQ.
б) Найдите эту площадь, если известна сторона a ромба и его острый угол α.



Решение. а) Обозначим через r радиус окружности, а через K и L — точки касания окружности со сторонами AB и AD. Заметим, что

$$S(CPQ) = S(CBPQD) - S(CBP) - S(CDQ) =$$
$$= \frac{2a + x + y + z}{2} \cdot r - (x+y)r = \left(a - \frac{x + y - z}{2}\right) \cdot r.$$

Заметим, что $\dfrac{x+y-z}{2}=BK$ — не зависит от выбора точек P и Q.

б) В силу п. а) имеем

$$S(CPQ)=S(CKA)=r\cdot AK.$$

Заметим, что $r=(a/2)\sin\alpha$ и $AK=r\cdot\operatorname{ctg}(\alpha/2)$, откуда $S(CPQ)=\dfrac{a^2}{4}\sin^2\alpha\operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Доказано, что площадь треугольника CPQ не зависит от выбора отрезка PQ.
- 2 б. Найдена площадь треугольника CPQ.
- 1 б. Используется факт равенства отрезков, исходящих из одной вершины и касающихся окружности.

Задача 10.4. Найдите все натуральные числа, представимые в виде $[a,b]+[b,c]+[c,a]$ для некоторых натуральных a, b и c (здесь $[x,y]$ — наименьшее общее кратное чисел x и y).

Ответ: Все натуральные числа, кроме 2^t, где t — целое неотрицательное число.

Решение. Сначала заметим, что число 1 не может быть представлено в таком виде. Докажем, что представляются все нечетные числа. В самом деле, $[1,1]+[k,1]+[1,k]=2k+1$ при всех натуральных k. Далее, заметим, что представляются все числа, имеющие нечетный делитель, больший 1. Действительно, $[2^s,2^s]+[2^sk,2^s]+[2^s,2^sk]=2^s(2k+1)$ для всех натуральных k и целых неотрицательных s.

Докажем, что степени двойки не представляются в таком виде. Предположим противное: пусть число 2^t представимо. Выберем наименьшее такое t. Без ограничения общности можно считать, что среди чисел a, b и c есть нечетные: в противном случае мы можем сократить все числа на наименьшую степень вхождения двойки и уменьшить число t. Тогда среди чисел a, b и c должно быть ровно одно нечетное число и два четных.

Без ограничения общности число c нечетно, $a = 2^\alpha a_1$ и $b = 2^\beta b_1$, где a_1 и b_1 нечетны. Если $\alpha > \beta$ (случай $\alpha < \beta$ аналогичен), то степени вхождения двойки в числа $[a, b]$, $[b, c]$ и $[c, a]$ равны α, β и α соответственно. Но тогда в сумму двойка входит в степени β, а потому эта сумма не может равняться степени двойки.

Значит, $\alpha = \beta$. Но тогда равенство $[2^\alpha a_1, 2^\alpha b_1] + [2^\alpha b_1, c] + [c, 2^\alpha a_1] = 2^t$ после сокращения на 2^α превращается в равенство $[a_1, b_1] + [b_1, c] + [c, a_1] = 2^{t-\alpha}$. Мы уменьшили представимую степень двойки и таким образом получили противоречие.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 6 б. В ответе пропущено число 1.
- 4 б. Доказано, что степени двойки не подходят, других продвижений нет.
- 3 б. Доказано, что любое число, кроме степени двойки, подходит, других продвижений нет.
- 2 б. Доказано, что любое нечетное число подходит, других продвижений нет.

Задача 10.5. Найдите количество перестановок $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ набора чисел $(1, 2, \ldots, 10)$, таких, что $a_1 \leqslant 2a_2 \leqslant \ldots \leqslant 10a_{10}$.

Ответ: 89.

Решение. Докажем общее утверждение: количество перестановок a_1, a_2, $\ldots$, a_n чисел 1, 2, $\ldots$, n, таких, что $a_1 \leqslant 2a_2 \leqslant \ldots \leqslant na_n$ равно F_{n+1}, где F_n — n-е число Фибоначчи ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$). В частности, отсюда будет следовать, что ответом в задаче является число $F_{11} = 89$.

Обозначим через P_n количество искомых перестановок длины n. Легко видеть, что $P_1 = 1$, $P_2 = 2$. Докажем, что $P_{n+1} = P_n + P_{n-1}$ при $n \geqslant 2$. Для этого поймем, на какой позиции может стоять в нашей перестановке число n.

Пусть k — такой индекс, что $a_k = n$. При $k = n$ мы получаем $a_n = n$, и количество таких перестановок равно P_{n-1}. При $k = n-1$ имеем $na_n \geqslant$

$n(n-1)$, откуда $a_n \geqslant n-1$. Но $a_n \neq n$, поэтому $a_n = n-1$, и количество таких перестановок равно P_{n-2}.

Предположим, что существует такая перестановка, что $a_k = n$ при $k \leqslant n-2$. Для каждого $i \in (k, n)$ имеем $kn = ka_k \leqslant ia_i < na_i$, поэтому $a_i \geqslant k+1$. Кроме того, $na_n \geqslant (n-1)a_{n-1} \geqslant (n-1)(k+1)$, откуда $a_n \geqslant k+1$. Получается, что все числа a_k, a_{k+1}, $\ldots$, a_n лежат на отрезке $[k+1; n]$. Но на этом отрезке только $n-k$ чисел — противоречие.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 3 б. Доказано, что либо $a_n = n$, либо $a_{n-1} = n$ и $a_n = n-1$, других продвижений нет.
- 2 б. Доказано, что либо $a_n = n$, либо $a_{n-1} = n$, других продвижений нет.
- 2 б. С помощью недоказанного предположения о числах Фибоначчи получен верный ответ, других продвижений нет.
- 1 б. Присутствует идея о том, что количество перестановок — это число Фибоначчи, но других продвижений нет.

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2025

Заключительный этап   24 марта

11 класс

Задача 11.1. Дан прямоугольный треугольник с натуральными длинами сторон. Пусть α — его острый угол, а угол β таков, что $\operatorname{tg} 2\beta = \operatorname{tg} 3\alpha$. Докажите, что величина $\operatorname{tg}\beta$ рациональна.

Решение. По формулам двойного и тройного аргументов получаем следующие формулы:

$$\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta} = \operatorname{tg} 2\beta = \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha(3-\operatorname{tg}^2\alpha)}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{p(3q^2-p^2)}{q(q^2-3p^2)} := \frac{1}{n}.$$

Значит, $\operatorname{tg}^2\beta + 2n\operatorname{tg}\beta - 1 = 0$. Это уравнение имеет рациональные корни тогда и только тогда, когда дискриминант этого квадратного уравнения должен быть точным квадратом. Вычисляя дискриминант, находим

$$D/4 = n^2 + 1 = \left(\frac{p(3q^2-p^2)}{q(q^2-3p^2)}\right)^2 + 1 = \frac{(p^2+q^2)^3}{p^2(3q^2-p^2)^2}.$$

Видно, что это число является квадратом рационального числа тогда и только тогда, когда квадратом натурального числа является выражение p^2+q^2.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. При вычислении дискриминанта квадратного уравнения на $\operatorname{tg}\beta$ допущена арифметическая ошибка, но числитель дискриминанта посчитан верно, и задача с учетом этого числителя решена правильно.
- 1 б. Задача сведена к исследованию квадратного уравнения на $\operatorname{tg}\beta$, но дальнейшие продвижения отсутствуют.

Задача 11.2. В некоторой школе все ребята увлекаются геометрией и состоят в различных геометрических клубах. Известно, что у любых двух клубов есть хотя бы один общий член. Докажите, что можно раздать школьникам циркули и линейки таким образом, чтобы у одного человека были и циркуль, и линейка, у каждого из остальных были или циркуль, или линейка (но не оба инструмента сразу), и в каждом клубе у его членов нашлись бы и циркуль, и линейка.

Решение. Рассмотрим самый маленький по численности участников клуб A (если таких несколько, выберем любой). Одному его участнику (назовем его Паша) выдадим и циркуль, и линейку, остальным участникам этого клуба дадим только циркуль, а всем остальным ребятам — только линейку. Докажем, что условие задачи будет выполняться.

Действительно, рассмотрим произвольный клуб X. Если в нем есть Паша, то условие сразу выполнено. В противном случае клуб X пересекается с клубом A по некоторым людям, причем это пересечение собственное, т.е. члены одного из клубов не могут все принадлежать и другому клубу. Действительно, A не содержится в X, потому что Паша есть в A, но не в X, а X не содержится в A, поскольку A — самый маленький клуб. Таким образом, в X есть люди из A с циркулем и люди из A с линейкой, что и требовалось.

Критерии

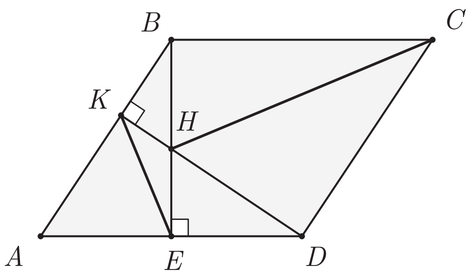
Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

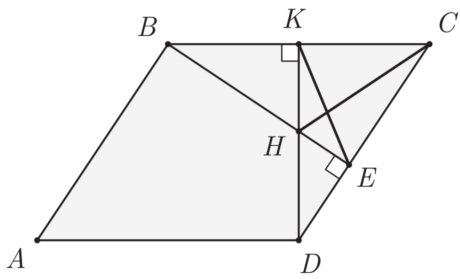
- 3 б. В решении не используется минимальность множества A, но остальные соображения верные.

Задача 11.3. Высоты BE и DK параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке H.

а) Докажите, что прямые CH и KE перпендикулярны;

б) Найдите длину диагонали BD, если $KE = 3$, $CH = 3{,}2$.

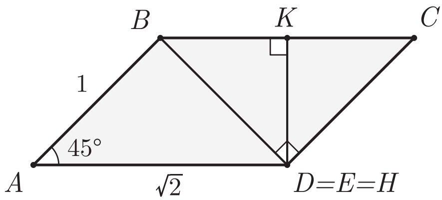




Ответ: а) неверно в общем случае.

б) $\frac{48}{\sqrt{31}}$.

Решение. а) Докажем, что в общем случае это неверно. В условии не указаны стороны, на которые опускаются высоты BE и DK, а значит, возможны два варианта: либо точки E и K лежат соответственно на сторонах AD и AB, либо соответственно на сторонах CD и CB. Приведём пример параллелограмма для второго случая, в котором утверждение задачи неверно — пусть $\angle A = 45°$, $AB = 1$, $AD = \sqrt{2}$. Тогда вершина D совпадает с точками E и H, а точка K является серединой BC. Очевидно, что тогда угол между CH и KE равен $45°$ и они не перпендикулярны.

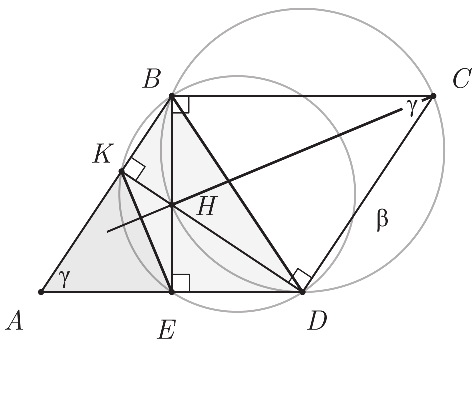


Замечание В случае, когда высоты BE и DK опущены на стороны AD и AB, действительно, всегда будет перпендикулярность между прямыми KE и CH.

б) ***Случай 1.*** Рассмотрим случай, когда высоты BE и DK опущены на стороны AD и AB.

Пусть $\angle BAD = \angle BCD = \gamma$. Треугольники AKE и ABD подобны (их углы равны), следовательно, $\frac{KE}{BD} = \frac{AE}{AB} = \cos\gamma$.

Для треугольника BCD, вписанного в окружность с диаметром CH верна теорема синусов $\frac{BD}{\sin\gamma} = CH$.



Подставляя известные значения KE и CH получаем:

$$\begin{cases} \sin\gamma = \frac{BD}{3{,}2}, \\ \cos\gamma = \frac{3}{BD}. \end{cases}$$

Заменяя $BD = x$ и подставляя все в выражение тригонометрического тождества получаем уравнение:

$$\frac{x^2}{3{,}2^2} + \frac{3^2}{x^2} = 1$$

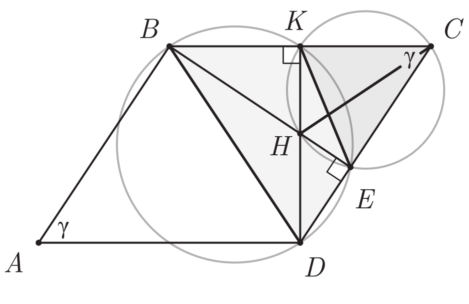
$$x^4 - 10{,}24x^2 + 92{,}16 = 0$$

Полученное квадратное уравнение на x^2 не имеет решений, так как его дискриминант меньше нуля. Значит, этот случай невозможен.

Случай 2. Рассмотрим случай, когда высоты BE и DK опущены на стороны CD и CB.

Для треугольника CKE, вписанного в окружность с диаметром CH верна теорема синусов $\frac{KE}{\sin\gamma} = CH$. Таким образом, $\sin\gamma = \frac{KE}{CH} = \frac{15}{16}$.

Пусть $\angle BCD = \gamma$. Треугольники CKE и CDB подобны (их углы равны), следовательно, $\frac{KE}{BD} = \frac{CE}{BE} = \cos\gamma = \sqrt{1-\sin^2\gamma} = \frac{\sqrt{31}}{16}$. Подставляя $KE = 3$ находим $BD = \frac{48}{\sqrt{31}}$.



Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 3 б. Доказано, что утверждение, что прямые CH и KE перпендикулярны, неверно в общем случае.

Задача 11.4. Пусть $a_n = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \ldots + [\sqrt{n}]$. Докажите, что среди элементов последовательности a_1, a_2, …есть лишь конечное количество простых чисел, и найдите наибольшее из них.

Решение. Пусть $k^2 \leqslant n < (k+1)^2$. Тогда $[\sqrt{n}] = k$. Значит, $[\sqrt{n}]$ принимает фиксированное значение, равное k, пока n пробегает отрезок $[k^2, (k+1)^2 - 1]$, длина которого равна $2k+1$. Значит, если $n = k^2 + t$, где $0 \leqslant t \leqslant 2k$, то

$$a_n = \sum_{i=1}^{k-1} i(2i+1) + k(t+1) = 2\sum_{i=1}^{k-1} i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} i + k(t+1) =$$
$$= \frac{(k-1)k(2k-1)}{3} + \frac{(k-1)k}{2} + k(t+1) = \frac{(k-1)k(4k+1)}{6} + k(t+1).$$

Заметим, что дробь $\dfrac{(k-1)k(4k+1)}{6}$ принимает целые значения при натуральных k. Если множитель k в числителе этой дроби не сокращается полностью со знаменателем, то данная дробь не взаимно проста с числом $k(t+1)$ (у них обоих есть общий делитель, входящий в k и не сократившийся после деления на 6). Ясно, что при $k > 6$ такой множитель заведомо останется. Поэтому $k \leqslant 6$ и $n \leqslant 7^2 - 1 = 48$. Значит, при $n \geqslant 49$ все числа a_n составные.

При $k = 6$ получаем формулу $a_n = 125 + 6(t+1)$, где $t \leqslant 12$. При $t = 12$ находим $a_{48} = 203 = 7 \cdot 29$, а при $t = 11$ получаем $a_{47} = 197$ — простое. Таким образом, наибольшее простое число в последовательности a_n равно 197 и соответствует индексу $n = 47$.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 6 б. При в целом верном решении допущена вычислительная ошибка при проверке $k = 6$.
- 3 б. Сумма приведена к виду $\dfrac{(k-1)k(4k+1)}{6} + k(t+1)$, но дальнейшие рассуждения неверные или отсутствуют.
- 1 б. Задача сведена к исследованию суммы вида $\sum\limits_{i=1}^{k-1} i(2i+1) + k(t+1)$, не содержащей целых частей и квадратных корней, но другие продвижения отсутствуют.

Задача 11.5. Дана клетчатая доска 6×6. Фигура *принц* умеет ходить по горизонтали и вертикали, делая ходы сначала на 1 клетку, потом — на две (в одном направлении), потом опять на одну и т.д. Может ли принц, встав на некоторую клетку, обойти все остальные клетки доски, побывав на каждой ровно по одному разу?

Ответ: Нет, не может.

Решение. Предположим, что такое возможно. Покрасим клетки доски как на рис.

1	1	2	2	1	1
1	1	2	2	1	1
2	2	1	1	2	2
2	2	1	1	2	2
1	1	2	2	1	1
1	1	2	2	1	1

Заметим, что при втором, четвертом, ..., 34-м ходе принц меняет цвет клетки. Значит, количество клеток цветов 1 и 2 может отличаться не более чем на 2, поскольку все клетки, начиная со второй и заканчивая 34-й, бьются на пары вторая-третья, четвертая-пятая, тридцать четвертая-тридцать пятая, и внутри каждой пары клетки имеют разный цвет. Ну а первая и последняя клетки могут иметь любой цвет.

Таким образом, количество клеток цветов 1 и 2 отличается не более чем на 2. Но с другой стороны, клеток цвета 1 больше на 4 — противоречие.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 1 б. Присутствует идея раскраски доски в несколько цветов, но других продвижений нет.

Задача 11.6. Найдите все тройки вещественных чисел x, y, z, для которых справедливо равенство множеств:

$$\{x, y, z\} = \left\{\frac{x-y}{y-z}, \frac{y-z}{z-x}, \frac{z-x}{x-y}\right\}.$$

Решение. Заметим, что $xyz = \dfrac{x-y}{y-z} \cdot \dfrac{y-z}{z-x} \cdot \dfrac{z-x}{x-y} = 1$, поэтому среди чисел x, y и z либо два отрицательных и одно положительное, либо все положительные. Без ограничения общности будем считать, что число x — наибольшее, тогда ясно, что числа $\dfrac{x-y}{y-z}$ и $\dfrac{y-z}{z-x}$ имеют разные знаки, значит, $x > 0 > y, z$. Разберем два случая.

Случай 1. $x > 0 > y > z$. В этом случае легко видеть, что $\dfrac{y-z}{x-z} < \dfrac{x-z}{x-y}$ (числитель меньше числителя, знаменатель больше знаменателя, и все разности положительны). Поэтому $0 > \dfrac{y-z}{z-x} > \dfrac{z-x}{x-y}$ и

$$x = \frac{x-y}{y-z}, \quad y = \frac{y-z}{z-x}, \quad z = \frac{z-x}{x-y}.$$

Домножая на знаменатели, получаем систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} xy - xz = x - y \\ yz - yx = y - z \\ zx - zy = z - x. \end{cases}$$

Заметим, что сумма трех этих равенств равна 0, поэтому можно рассматривать только первые два. Выражая из второго равенства переменную y, находим $y = \dfrac{z}{x - z + 1}$. Подставляя это выражение в первое равенство и упрощая, получаем

$$z = \frac{-1-x}{x}, \quad y = \frac{-1}{1+x}.$$

Когда переменная x будет пробегать все возможные положительные значения, эти две формулы будут описывать соответствующие значения переменных y и z.

Заметим, что мы рассматривали случай, когда переменная x — наибольшая. Если придать переменной x отрицательные значения, полученные формулы будут давать ответ в ситуациях, когда наибольшей является переменная y или z. Таким образом, первая серия ответов выглядит следующим образом:

$$(x, y, z) = \left(t, -\frac{1}{t+1}, -\frac{1+t}{t}\right), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}.$$

Случай 2. $x > 0 > z > y$. В этом случае мы получаем аналогичную серию равенств:

$$x = \frac{y-z}{z-x}, \quad y = \frac{x-y}{y-z}, \quad z = \frac{z-x}{x-y}.$$

Домножая на знаменатели, получаем систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} xz - x^2 = y - z \\ y^2 - yz = x - y \\ zx - zy = z - x \end{cases}$$

Складывая эти равенства, получаем формулу $(x-y)(x+y-2z) = 0$. Учитывая, что $x \neq y$, находим $2z = x + y$. Тогда $z - x = y - z$, и первое уравнение нашей системы переписывается в виде $x(z-x) = z - x$. Вновь вспоминая, что $x \neq z$, находим $x = 1$. Остается решить несложную систему $\begin{cases} z - yz = z - 1 \\ y + 1 = 2z. \end{cases}$ Решая ее, находим ответ $y = -2$ и $z = -\frac{1}{2}$ (мы учитываем, что $z > y$).

Вновь циклически переставляя найденные ответы, получаем еще три тройки:

$$\Big(1, -2, -\frac{1}{2}\Big), \quad \Big(-\frac{1}{2}, 1, -2\Big), \quad \Big(-2, -\frac{1}{2}, 1\Big).$$

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 4 б. Верно разобран случай 1, но случай 2 отсутствует или разобран неверно
- 3 б. Верно разобран случай 2, но случай 1 отсутствует или разобран неверно.
- 1 б. Доказано, что $xyz = 1$, другие продвижения отсутствуют.