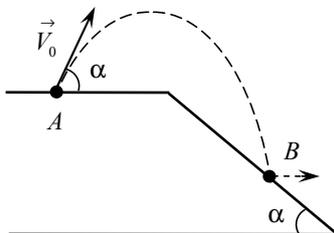


Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2019
Интернет-этап, 4 февраля – 24 февраля

10.1/1. Мяч бросают из точки A под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. В точке B , лежащей на нисходящем участке траектории, мяч падает на плоскость, наклонённую к горизонту под тем же углом α . В результате абсолютно упругого удара мяч отскакивает от плоскости в горизонтальном направлении. Найдите начальную скорость мяча V_0 . Точка B лежит на высоте $h = 3,1$ м ниже точки A ; ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Ответ выразите в м/с и округлите до десятых.



Возможное решение

Пусть \vec{V} — скорость мяча перед ударом о наклонную плоскость. При абсолютно упругом ударе мяч отражается от плоскости зеркально. Учитывая, что скорость мяча сразу после удара направлена горизонтально, из простых геометрических соображений получаем, что вектор \vec{V} образует с горизонтом угол $\beta = 2\alpha = 60^\circ$. Обозначим через t время движения мяча из точки A в точку B . Тогда

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g}t$$

Угол между векторами \vec{V} и \vec{V}_0 равен $\alpha + \beta = 3\alpha = 90^\circ$. Таким образом, векторы \vec{V} , \vec{V}_0 и $\vec{g}t$ образуют прямоугольный треугольник с углом α , лежащим против стороны \vec{V}_0 . Отсюда находим связь V и V_0 :

$$V = V_0 \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3} V_0$$

Далее воспользуемся законом сохранения энергии. Обозначив массу мяча через m , имеем:

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2} + mgh \quad \longrightarrow \quad V^2 = V_0^2 + 2gh$$

Подставляя сюда $V = \sqrt{3} V_0$, находим начальную скорость мяча:

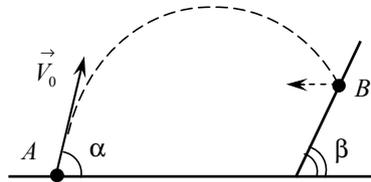
$$3V_0^2 = V_0^2 + 2gh \quad \longrightarrow \quad V_0 = \sqrt{gh} = 5,6 \text{ м/с}$$

Ответ:

$$V_0 = \sqrt{gh} = 5,6 \text{ м/с}$$

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2019
Интернет-этап, 4 февраля – 24 февраля

10.1/2. Мяч бросают из точки A под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. В точке B , лежащей на нисходящем участке траектории, мяч падает на плоскость, наклонённую к горизонту под углом $\beta = (\alpha + 90^\circ)/2$. В результате абсолютно упругого удара мяч отскакивает от плоскости в горизонтальном направлении. Найдите начальную скорость мяча V_0 . Точка B лежит на высоте $h = 1,9$ м над точкой A ; ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Ответ выразите в м/с и округлите до десятых.



Возможное решение

Пусть \vec{V} — скорость мяча перед ударом о наклонную плоскость. При абсолютно упругом ударе мяч отражается от плоскости зеркально. Учитывая, что скорость мяча сразу после удара направлена горизонтально, из простых геометрических соображений получаем, что вектор \vec{V} образует с горизонтом угол $\gamma = 180^\circ - 2\beta = 90^\circ - \alpha = 30^\circ$. Обозначим через t время движения мяча из точки A в точку B . Тогда

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g}t$$

Угол между векторами \vec{V} и \vec{V}_0 равен $\alpha + \gamma = 90^\circ$. Таким образом, векторы \vec{V} , \vec{V}_0 и $\vec{g}t$ образуют прямоугольный треугольник с углом α , лежащим против стороны \vec{V}_0 . Отсюда находим связь V и V_0 :

$$V = V_0 \operatorname{ctg} \alpha = \frac{V_0}{\sqrt{3}}$$

Далее воспользуемся законом сохранения энергии. Обозначив массу мяча через m , имеем:

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + mgh \quad \longrightarrow \quad V_0^2 = V^2 + 2gh$$

Подставляя сюда $V = V_0/\sqrt{3}$, находим начальную скорость мяча:

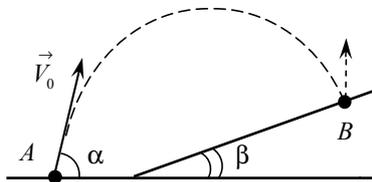
$$V_0^2 = \frac{V_0^2}{3} + 2gh \quad \longrightarrow \quad V_0 = \sqrt{3gh} = 7,6 \text{ м/с}$$

Ответ:

$$V_0 = \sqrt{3gh} = 7,6 \text{ м/с}$$

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2019
Интернет-этап, 4 февраля – 24 февраля

10.1/3. Мяч бросают из точки A под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту со скоростью $V_0 = 12$ м/с. В точке B , лежащей на нисходящем участке траектории, мяч падает на плоскость, наклонённую к горизонту под углом $\beta = \alpha/2$. В результате абсолютно упругого удара мяч отскакивает от плоскости вертикально вверх. Найдите высоту h точки B над точкой A . Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Ответ выразите в метрах.



Возможное решение

Пусть \vec{V} — скорость мяча перед ударом о наклонную плоскость. При абсолютно упругом ударе мяч отражается от плоскости зеркально. Учитывая, что скорость мяча сразу после удара направлена вертикально вверх, из простых геометрических соображений получаем, что вектор \vec{V} образует с горизонтом угол $\gamma = 90^\circ - 2\beta = 90^\circ - \alpha$. Обозначим через t время движения мяча из точки A в точку B . Тогда

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g}t$$

Угол между векторами \vec{V} и \vec{V}_0 равен $\alpha + \gamma = 90^\circ$. Таким образом, векторы \vec{V} , \vec{V}_0 и $\vec{g}t$ образуют прямоугольный треугольник с углом α , лежащим против стороны \vec{V}_0 . Отсюда находим связь V и V_0 :

$$V = V_0 \operatorname{ctg} \alpha = V_0 \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{V_0}{\sqrt{3}}$$

Далее воспользуемся законом сохранения энергии. Обозначив массу мяча через m , имеем:

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + mgh \quad \longrightarrow \quad V_0^2 = V^2 + 2gh$$

Подставляя сюда $V = V_0/\sqrt{3}$, находим высоту h :

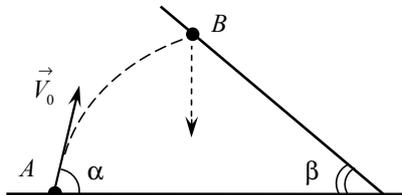
$$V_0^2 = \frac{V_0^2}{3} + 2gh \quad \longrightarrow \quad h = \frac{V_0^2}{3g} = 4,8 \text{ м}$$

Ответ:

$$h = \frac{V_0^2}{3g} = 4,8 \text{ м}$$

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2019
Интернет-этап, 4 февраля – 24 февраля

10.1/4. Мяч бросают из точки A под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту со скоростью $V_0 = 13,1$ м/с. В точке B , лежащей на восходящем участке траектории, мяч сталкивается с плоскостью, наклонённой к горизонту под углом $\beta = 30^\circ$. В результате абсолютно упругого удара мяч отскакивает от плоскости вертикально вниз. Найдите высоту h точки B над точкой A . Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Ответ выразите в метрах.



Возможное решение

Пусть \vec{V} — скорость мяча перед ударом о наклонную плоскость. При абсолютно упругом ударе мяч отражается от плоскости зеркально. Учитывая, что скорость мяча сразу после удара направлена вертикально вниз, из простых геометрических соображений получаем, что вектор \vec{V} образует с горизонтом угол $90^\circ - 2\beta = 30^\circ$. Обозначим через t время движения мяча из точки A в точку B . Тогда

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g}t$$

Входящие сюда векторы образуют равнобедренный треугольник — углы, прилегающие к стороне V_0 , равны 30° . Отсюда находим связь V и V_0 :

$$V_0 = 2V \cos 30^\circ = \sqrt{3}V \quad \longrightarrow \quad V = \frac{V_0}{\sqrt{3}}$$

Далее воспользуемся законом сохранения энергии. Обозначив массу мяча через m , имеем:

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + mgh \quad \longrightarrow \quad V_0^2 = V^2 + 2gh$$

Подставляя сюда $V = V_0/\sqrt{3}$, находим высоту h :

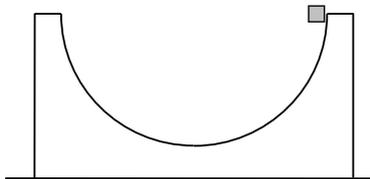
$$V_0^2 = \frac{V_0^2}{3} + 2gh \quad \longrightarrow \quad h = \frac{V_0^2}{3g} = 5,7 \text{ м}$$

Ответ:

$$h = \frac{V_0^2}{3g} = 5,7 \text{ м}$$

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2019
Интернет-этап, 4 февраля – 24 февраля

10.2/1. С края полусферы массой $M = 2,5$ кг, стоящей на шероховатом горизонтальном столе, начинает соскальзывать маленький брусок массой $m = 40$ г. Найдите минимальное значение коэффициента трения μ между полусферой и столом, при котором полусфера будет оставаться неподвижной при движении бруска. Трение между бруском и полусферой не учитывайте; для упрощения считайте силу нормальной реакции, действующую на полусферу со стороны стола, постоянной и равной Mg . Ответ запишите в виде десятичной дроби.



Возможное решение

Рассмотрим движение бруска по неподвижной полусфере. Пусть брусок прошёл по поверхности полусферы дугу, которой соответствует центральный угол α . Вторым законом Ньютона, записанный в проекции на направление центростремительного ускорения, даёт:

$$\frac{mV^2}{R} = N_1 - mg \sin \alpha$$

V — скорость бруска, R — радиус полусферы, N_1 — сила нормальной реакции, действующая на брусок со стороны полусферы. Скорость бруска найдём из закона сохранения энергии. Принимая потенциальную энергию за нуль в начальном положении бруска, получаем:

$$0 = \frac{mV^2}{2} - mgR \sin \alpha \quad \longrightarrow \quad V^2 = 2gR \sin \alpha$$

Сила N_1 равна:

$$N_1 = mg \sin \alpha + \frac{mV^2}{R} = mg \sin \alpha + m \frac{2gR \sin \alpha}{R} = 3mg \sin \alpha$$

По третьему закону Ньютона сила N_1 равна силе давления бруска на полусферу. Горизонтальная составляющая силы давления компенсируется силой трения покоя F , действующей на полусферу со стороны стола:

$$F = N_1 \cos \alpha = 3mg \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3mg \sin 2\alpha}{2}$$

Вертикальная составляющая силы давления и сила тяжести Mg определяют силу нормальной реакции N_2 , действующую на полусферу со стороны стола:

$$N_2 = Mg + N_1 \sin \alpha = Mg + 3mg \sin^2 \alpha$$

В силу неравенства $M \gg m$ вторым слагаемым можно пренебречь. В этом приближении

$$N_2 = Mg$$

Сила трения покоя удовлетворяет неравенству:

$$F \leq \mu N_2$$

Отсюда получаем:

$$\frac{3mg \sin 2\alpha}{2} \leq \mu Mg \quad \longrightarrow \quad \mu \geq \frac{3m \sin 2\alpha}{2M}$$

Для того чтобы это неравенство выполнялось при любом значении угла α , достаточно потребовать, чтобы оно выполнялось при $\sin 2\alpha = 1$. Тогда минимальное значение коэффициента трения, при котором полусфера будет оставаться неподвижной, равно:

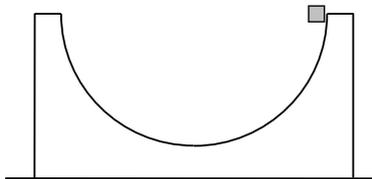
$$\mu = \frac{3m}{2M} = 0,024$$

Ответ:

$$\mu = \frac{3m}{2M} = 0,024$$

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2019
Интернет-этап, 4 февраля – 24 февраля

10.2/2. С края полусферы массой $M = 1,8$ кг, стоящей на шероховатом горизонтальном столе, начинает соскальзывать маленький брусок массой $m = 30$ г. Найдите минимальное значение коэффициента трения μ между полусферой и столом, при котором полусфера будет оставаться неподвижной при движении бруска. Трение между бруском и полусферой не учитывайте; для упрощения считайте силу нормальной реакции, действующую на полусферу со стороны стола, постоянной и равной Mg . Ответ запишите в виде десятичной дроби.



Возможное решение

Рассмотрим движение бруска по неподвижной полусфере. Пусть брусок прошёл по поверхности полусферы дугу, которой соответствует центральный угол α . Вторым закон Ньютона, записанный в проекции на направление центростремительного ускорения, даёт:

$$\frac{mV^2}{R} = N_1 - mg \sin \alpha$$

V — скорость бруска, R — радиус полусферы, N_1 — сила нормальной реакции, действующая на брусок со стороны полусферы. Скорость бруска найдём из закона сохранения энергии. Принимая потенциальную энергию за нуль в начальном положении бруска, получаем:

$$0 = \frac{mV^2}{2} - mgR \sin \alpha \quad \longrightarrow \quad V^2 = 2gR \sin \alpha$$

Сила N_1 равна:

$$N_1 = mg \sin \alpha + \frac{mV^2}{R} = mg \sin \alpha + m \frac{2gR \sin \alpha}{R} = 3mg \sin \alpha$$

По третьему закону Ньютона сила N_1 равна силе давления бруска на полусферу. Горизонтальная составляющая силы давления компенсируется силой трения покоя F , действующей на полусферу со стороны стола:

$$F = N_1 \cos \alpha = 3mg \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3mg \sin 2\alpha}{2}$$

Вертикальная составляющая силы давления и сила тяжести Mg определяют силу нормальной реакции N_2 , действующую на полусферу со стороны стола:

$$N_2 = Mg + N_1 \sin \alpha = Mg + 3mg \sin^2 \alpha$$

В силу неравенства $M \gg m$ вторым слагаемым можно пренебречь. В этом приближении

$$N_2 = Mg$$

Сила трения покоя удовлетворяет неравенству:

$$F \leq \mu N_2$$

Отсюда получаем:

$$\frac{3mg \sin 2\alpha}{2} \leq \mu Mg \quad \longrightarrow \quad \mu \geq \frac{3m \sin 2\alpha}{2M}$$

Для того чтобы это неравенство выполнялось при любом значении угла α , достаточно потребовать, чтобы оно выполнялось при $\sin 2\alpha = 1$. Тогда минимальное значение коэффициента трения, при котором полусфера будет оставаться неподвижной, равно:

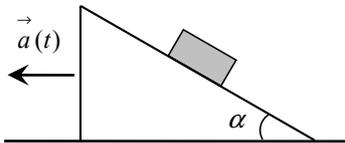
$$\mu = \frac{3m}{2M} = 0,025$$

Ответ:

$$\mu = \frac{3m}{2M} = 0,025$$

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2019
Интернет-этап, 4 февраля – 24 февраля

10.3/1. На клине, стоящем на горизонтальном столе, лежит брусок. Угол наклона клина $\alpha = \arctg(0,4)$, коэффициент трения между клином и бруском $\mu = 0,5$. Клин начинает двигаться с горизонтальным ускорением, зависящим от времени t по закону $a(t) = a_0 \cdot (t/t_0)$, где $a_0 = 1 \text{ м/с}^2$ и $t_0 = 7,2 \text{ с}$. Найдите, через какое время T брусок начнёт скользить по клину. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Ответ выразите в секундах.



Возможное решение

Рассмотрим движение бруска вместе с клином до начала скольжения. На брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции \vec{N} и сила трения покоя \vec{F} . Вектор \vec{F} направлен вверх вдоль поверхности клина. Запишем второй закон Ньютона для бруска:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}$$

Проецируя это равенство на направления векторов \vec{F} и \vec{N} , получаем:

$$ma \cos \alpha = F - mg \sin \alpha \quad \longrightarrow \quad F = m(g \sin \alpha + a \cos \alpha)$$

$$-ma \sin \alpha = N - mg \cos \alpha \quad \longrightarrow \quad N = m(g \cos \alpha - a \sin \alpha)$$

Брусок начинает скользить по клину, когда сила трения покоя F достигает своего максимального значения, равного силе трения скольжения μN :

$$F = \mu N \quad \longrightarrow \quad m(g \sin \alpha + a \cos \alpha) = \mu m(g \cos \alpha - a \sin \alpha) \quad \longrightarrow \quad a = \frac{g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

Подставляя сюда $a = a_0(T/t_0)$, находим время T :

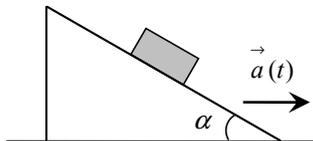
$$T = t_0 \cdot \frac{g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}{a_0(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} = t_0 \cdot \frac{g}{a_0} \cdot \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} = 6 \text{ с}$$

Ответ:

$$T = t_0 \cdot \frac{g}{a_0} \cdot \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} = 6 \text{ с}$$

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2019
Интернет-этап, 4 февраля – 24 февраля

10.3/2. На клине, стоящем на горизонтальном столе, лежит брусок. Угол наклона клина $\alpha = \arctg(0,2)$. Клин начинает двигаться с горизонтальным ускорением, зависящим от времени t по закону $a(t) = a_0 \cdot (t/t_0)$, где $a_0 = 1 \text{ м/с}^2$ и $t_0 = 0,8 \text{ с}$. Спустя время $T = 4 \text{ с}$ брусок начинает скользить вверх по клину. Найдите коэффициент трения μ между клином и бруском. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Ответ округлите до сотых.



Возможное решение

Рассмотрим движение бруска вместе с клином до начала скольжения. На брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции \vec{N} и сила трения покоя \vec{F} . Запишем второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}$$

Направим ось x вдоль поверхности клина вниз, ось y — вдоль вектора \vec{N} . В проекциях на эти оси получаем:

$$ma \cos \alpha = mg \sin \alpha + F_x \quad \longrightarrow \quad F_x = m(a \cos \alpha - g \sin \alpha)$$

$$ma \sin \alpha = N - mg \cos \alpha \quad \longrightarrow \quad N = m(a \sin \alpha + g \cos \alpha)$$

Здесь F_x — проекция силы \vec{F} на ось x . Брусок не будет скользить по клину до тех пор, пока выполняется неравенство:

$$|F_x| \leq \mu N$$

В левой части стоит абсолютная величина силы трения покоя, в правой — сила трения скольжения. Из полученных выше выражений для сил следует, что при разгоне клина правая часть неравенства монотонно возрастает как функция времени. Что касается величины F_x , то она обращается в нуль в момент времени τ , который определяется условием:

$$a \cos \alpha = g \sin \alpha \quad \longrightarrow \quad a_0 (\tau/t_0) = g \operatorname{tg} \alpha \quad \longrightarrow \quad \tau = t_0 \frac{g}{a_0} \operatorname{tg} \alpha = 1,6 \text{ с}$$

Таким образом, при $0 \leq t < \tau$ проекция F_x отрицательна, то есть сила трения направлена вдоль поверхности клина вверх (как в случае неподвижного клина). При этом модуль F_x как функция времени убывает от значения $mg \sin \alpha$ при $t = 0$ до нуля при $t = \tau$ и приведённое выше неравенство выполняется. При $t > \tau$ проекция F_x положительна и сила трения направлена вдоль поверхности клина вниз. Как функция времени F_x монотонно возрастает. Брусок начинает скользить по клину вверх (против направления силы трения) в момент времени T , когда сила трения покоя становится равной силе трения скольжения:

$$F_x = \mu N \quad \longrightarrow \quad m(a \cos \alpha - g \sin \alpha) = \mu m(a \sin \alpha + g \cos \alpha) \quad \longrightarrow \quad \mu = \frac{a \cos \alpha - g \sin \alpha}{a \sin \alpha + g \cos \alpha}$$

Подставляя сюда $a = a_0 (T/t_0)$ и вводя безразмерное отношение

$$Z = \frac{a}{g} = \frac{T}{t_0} \cdot \frac{a_0}{g}$$

получаем:

$$\mu = \frac{Z - \operatorname{tg} \alpha}{1 + Z \operatorname{tg} \alpha}$$

Подстановка числовых значений даёт:

$$Z = 0.5$$

$$\mu = 0.27$$

Ответ:

$$\mu = \frac{Z - \operatorname{tg} \alpha}{1 + Z \operatorname{tg} \alpha} = 0.27, \quad Z = \frac{T}{t_0} \cdot \frac{a_0}{g} = 0.5$$

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2019
Интернет-этап, 4 февраля – 24 февраля

10.4/1. Два одинаковых сосуда соединены короткой трубкой с краном. Сначала кран закрыт, в одном сосуде имеется $\nu_1 = 0,2$ моля гелия при давлении $P_1 = 0,7$ МПа, в другом – $\nu_2 = 0,3$ моля молекулярного азота N_2 при давлении $P_2 = 0,1$ МПа. Кран открывают, и газы начинают перемешиваться. В конечном состоянии оба сосуда заполнены однородной газовой смесью, находящейся в механическом и тепловом равновесии. Найдите давление P этой смеси. Ответ выразите в мегапаскалях и округлите до сотых. Стенки сосудов, трубка и кран не проводят тепло. Объём трубки не учитывайте.

Возможное решение

Пусть T_1 и T_2 – начальные температуры гелия и азота, T – конечная температура газовой смеси. Рассмотрим баланс энергии для системы, состоящей из двух газов. Так как тепло к системе не подводится и газы не совершают механическую работу, то внутренняя энергия системы сохраняется:

$$\frac{3}{2} \nu_1 RT_1 + \frac{5}{2} \nu_2 RT_2 = \frac{3}{2} \nu_1 RT + \frac{5}{2} \nu_2 RT \quad \longrightarrow \quad 3 \nu_1 RT_1 + 5 \nu_2 RT_2 = (3 \nu_1 + 5 \nu_2) RT$$

Обозначим через V объём одного сосуда и запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для газов в начальном состоянии и для конечной газовой смеси:

$$P_1 V = \nu_1 RT_1; \quad P_2 V = \nu_2 RT_2$$

$$P \cdot 2V = (\nu_1 + \nu_2) RT \quad \longrightarrow \quad RT = \frac{2PV}{\nu_1 + \nu_2}$$

Подставляя эти результаты в уравнение баланса энергии, находим конечное давление газовой смеси:

$$3 P_1 V + 5 P_2 V = \frac{(3 \nu_1 + 5 \nu_2) 2 PV}{\nu_1 + \nu_2} \quad \longrightarrow \quad P = \frac{(3 P_1 + 5 P_2) (\nu_1 + \nu_2)}{2 (3 \nu_1 + 5 \nu_2)} = 0,31 \text{ МПа}.$$

Ответ:

$$P = \frac{(3 P_1 + 5 P_2) (\nu_1 + \nu_2)}{2 (3 \nu_1 + 5 \nu_2)} = 0,31 \text{ МПа}.$$

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2019
Интернет-этап, 4 февраля – 24 февраля

10.4/2. Два одинаковых сосуда соединены короткой трубкой с краном. Сначала кран закрыт, в одном сосуде имеется гелий при давлении $P_1 = 0,4$ МПа, в другом — молекулярный азот N_2 при давлении $P_2 = 0,3$ МПа. Кран открывают, и газы начинают перемешиваться. В конечном состоянии оба сосуда заполнены однородной газовой смесью, находящейся в механическом и тепловом равновесии. Давление смеси $P = 0,3$ МПа. Найдите отношение x числа молей азота к числу молей гелия. Стенки сосудов, трубка и кран не проводят тепло. Объём трубки не учитывайте.

Возможное решение

Пусть T_1 и T_2 — начальные температуры гелия и азота, T — конечная температура газовой смеси, ν_1 и ν_2 — количества молей гелия и азота. Рассмотрим баланс энергии для системы, состоящей из двух газов. Так как тепло к системе не подводится и газы не совершают механическую работу, то внутренняя энергия системы сохраняется:

$$\frac{3}{2} \nu_1 R T_1 + \frac{5}{2} \nu_2 R T_2 = \frac{3}{2} \nu_1 R T + \frac{5}{2} \nu_2 R T \quad \longrightarrow \quad 3 \nu_1 R T_1 + 5 \nu_2 R T_2 = (3 \nu_1 + 5 \nu_2) R T$$

Обозначим через V объём одного сосуда и запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для газов в начальном состоянии и для конечной газовой смеси:

$$P_1 V = \nu_1 R T_1; \quad P_2 V = \nu_2 R T_2$$
$$P \cdot 2V = (\nu_1 + \nu_2) R T \quad \longrightarrow \quad R T = \frac{2 P V}{\nu_1 + \nu_2}$$

Подставляя эти результаты в уравнение баланса энергии, получаем:

$$3 P_1 V + 5 P_2 V = \frac{(3 \nu_1 + 5 \nu_2) 2 P V}{\nu_1 + \nu_2} \quad \longrightarrow \quad (3 P_1 + 5 P_2) (\nu_1 + \nu_2) = 2 P (3 \nu_1 + 5 \nu_2)$$

Введём отношение числа молей азота к числу молей гелия:

$$x = \frac{\nu_2}{\nu_1}$$

Выражая отсюда ν_2 , получаем:

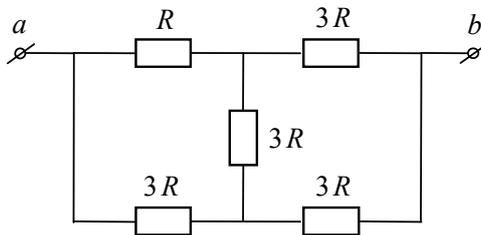
$$(3 P_1 + 5 P_2) (\nu_1 + x \nu_1) = 2 P (3 \nu_1 + 5 x \nu_1) \quad \longrightarrow \quad (3 P_1 + 5 P_2) (1 + x) = 2 P (3 + 5 x)$$

$$3 P_1 + 5 P_2 + x (3 P_1 + 5 P_2) = 6 P + 10 P x \quad \longrightarrow \quad x = \frac{3 P_1 + 5 P_2 - 6 P}{10 P - 3 P_1 - 5 P_2} = 3$$

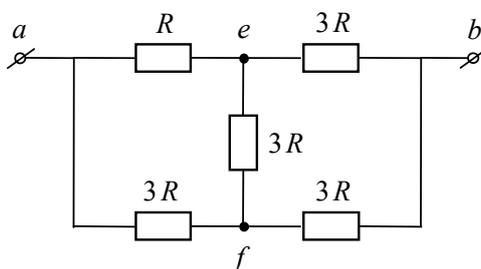
Ответ:

$$x = \frac{3 P_1 + 5 P_2 - 6 P}{10 P - 3 P_1 - 5 P_2} = 3$$

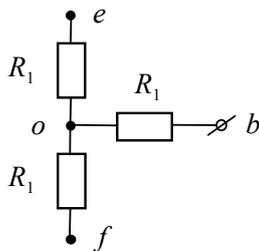
10.5/1. Система, состоящая из одного сопротивления R и четырёх сопротивлений $3R$, подключена к источнику постоянного напряжения за клеммы a и b . Найдите отношение $x = (R_0 - 2R)/R$, где R_0 – общее сопротивление системы. Ответ округлите до сотых.



Возможное решение



Вспользуемся преобразованием треугольник–звезда. В рассматриваемой схеме имеются треугольники $ae f$ и $be f$. Это замкнутые контуры, которые присоединяются к остальной цепи за три узла, причём между любыми двумя узлами включено одно сопротивление. Удобнее работать с треугольником $be f$, поскольку он состоит из трёх одинаковых сопротивлений. Преобразуем этот треугольник в звезду. Очевидно, что все три сопротивления, входящие в состав звезды, одинаковы.



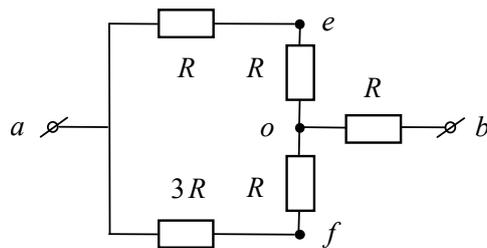
Для того чтобы найти их величину R_1 , представим себе, что треугольник подключён к источнику за точки b и e . В этом случае имеем два последовательно соединённых сопротивления в ветвях bf и fe . К ним параллельно присоединено сопротивление в ветви be . Общее сопротивление треугольника в этом случае равно $2R$. Если подключить к источнику звезду за те же точки, то будем иметь два последовательно соединённых сопротивления в ветвях bo и oe (ток через сопротивление в ветви of равен нулю). Общее сопротивление звезды равно $2R_1$. Приравняв сопротивления треугольника и звезды, находим R_1 :

$$2R = 2R_1 \quad \longrightarrow \quad R_1 = R$$

Заменяя в исходной схеме треугольник $be f$ звездой, приходим к эквивалентной схеме, сопротивление которой легко найти, пользуясь стандартными правилами сложения сопротивлений при параллельном и последовательном соединениях. Для общего сопротивления всей системы получаем:

$$R_0 = \frac{7R}{3}$$

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2019
Интернет-этап, 4 февраля – 24 февраля



Искомое отношение x равно:

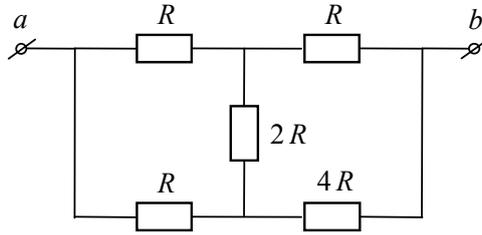
$$x = \frac{R_0 - 2R}{R} = \frac{1}{3} = 0,33$$

Ответ:

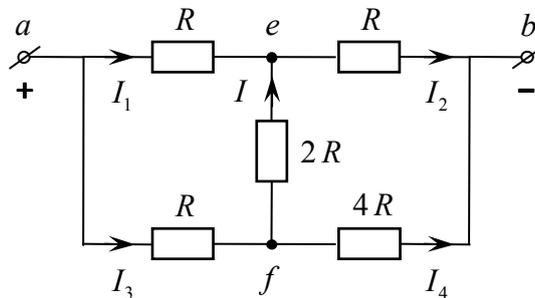
$$x = 0,33$$

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2019
Интернет-этап, 4 февраля – 24 февраля

10.5/2. Система, состоящая из трёх сопротивлений $R = 100$ Ом, одного сопротивления $2R$ и одного сопротивления $4R$, подключена к источнику постоянного напряжения $V = 22$ В за клеммы a и b . Найдите силу тока I , текущего через сопротивление $2R$. Ответ выразите в миллиамперах.



Возможное решение



Пусть положительный полюс батареи подключен к клемме a , а отрицательный к клемме b . Расставим токи в ветвях схемы и запишем закон сохранения заряда в узлах e и f :

$$I_2 = I_1 + I; \quad I_3 = I_4 + I$$

Приравняв нулю алгебраическую сумму напряжений в замкнутом контуре $ae fa$, получаем:

$$R I_1 - 2 R I - R I_3 = 0 \quad \longrightarrow \quad I_1 - 2 I - I_3 = 0$$

Кроме того, сумма напряжений на двух верхних и двух нижних сопротивлениях равна V . Имеем ещё два уравнения:

$$R I_1 + R I_2 = V \quad \longrightarrow \quad I_1 + I_2 = \frac{V}{R}$$

$$R I_3 + 4 R I_4 = V \quad \longrightarrow \quad I_3 + 4 I_4 = \frac{V}{R}$$

Получилась система пяти линейных уравнений для пяти неизвестных токов. Последовательно исключая неизвестные, находим ток I :

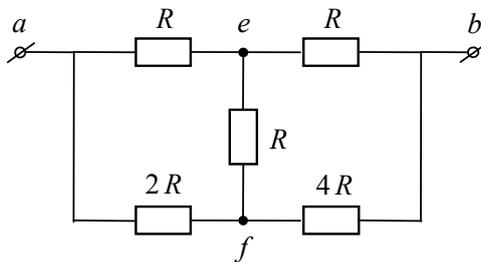
$$I = \frac{V}{11 R} = 20 \text{ мА}$$

Ответ:

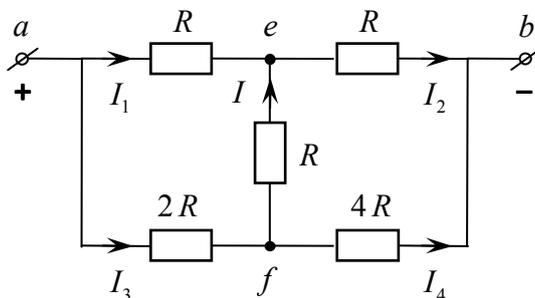
$$I = \frac{V}{11 R} = 20 \text{ мА}$$

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2019
Интернет-этап, 4 февраля – 24 февраля

10.5/3. Система, состоящая из трёх сопротивлений R , одного сопротивления $2R$ и одного сопротивления $4R$, подключена к источнику постоянного напряжения $V_0 = 51$ В за клеммы a и b . Найдите напряжение V на участке ef . Ответ выразите в вольтах.



Возможное решение



Пусть положительный полюс батареи подключен к клемме a , а отрицательный к клемме b . Расставим токи в ветвях схемы и запишем закон сохранения заряда в узлах e и f :

$$I_2 = I_1 + I; \quad I_3 = I_4 + I$$

Переходя от токов к напряжениям на сопротивлениях, имеем:

$$\frac{V_2}{R} = \frac{V_1}{R} + \frac{V}{R} \quad \longrightarrow \quad V_2 = V_1 + V$$

$$\frac{V_3}{2R} = \frac{V_4}{4R} + \frac{V}{R} \quad \longrightarrow \quad 2V_3 = V_4 + 4V$$

Приравняв нулю алгебраическую сумму напряжений в замкнутых контурах $ae fa$ и $befb$, получаем:

$$V_1 - V - V_3 = 0; \quad V_2 - V_4 + V = 0$$

Кроме того, сумма напряжений на двух верхних сопротивлениях равна V_0 :

$$V_1 + V_2 = V_0$$

Получилась система пяти линейных уравнений для пяти неизвестных напряжений. Последовательно исключая неизвестные, находим напряжение V :

$$V = \frac{V_0}{17} = 3 \text{ В}$$

Ответ:

$$V = \frac{V_0}{17} = 3 \text{ В}$$