Задачи и решения

6–7 классы

Задача 1/1. На доске нарисован квадрат 5×5. В каждом маленьком квадратике Федя написал число. Оказалось, что сумма чисел в любом уголке из трех клеток равна 12. Чему равняется сумма чисел в угловых клетках квадрата, если известно, что сумма всех чисел в квадрате 5×5 равна 100?

Ответ: 16.

Решение. Заметим, что квадрат 5×5 можно разрезать на 7 трехклеточных уголков и 4 угловых клетки (рис. 1).

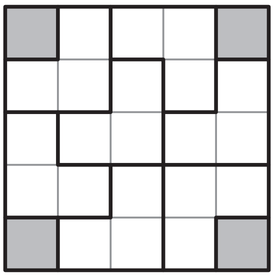

Рис. 1: к решению задачи 1/1

Таким образом, сумма чисел в угловых клетках равна $100 - 7 \cdot 12 = 16$. $\square$

Задача 1/2. На доске нарисован квадрат 5×5. В каждом маленьком квадратике Федя написал число. Оказалось, что сумма чисел в любом уголке из трех клеток равна 9. Чему равняется сумма чисел в угловых клетках квадрата, если известно, что сумма всех чисел в квадрате 5×5 равна 75?

Ответ: 12.

Решение. Заметим, что квадрат 5×5 можно разрезать на 7 трехклеточных уголков и 4 угловых клетки (рис. 2).

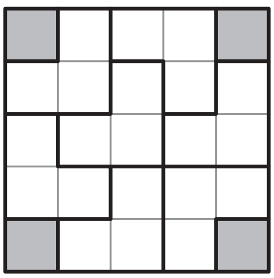

Рис. 2: к решению задачи 1/2

Таким образом сумма чисел в угловых клетках равна $75 - 7 \cdot 9 = 12$. $\square$

Задача 1/3. На доске нарисован квадрат 5×5. В каждом маленьком квадратике Федя написал число. Оказалось, что сумма чисел в любом уголке из трех клеток равна 15. Чему равняется сумма чисел в угловых клетках квадрата, если известно, что сумма всех чисел в квадрате 5×5 равна 125?

Ответ: 20.

Решение. Заметим, что квадрат 5×5 можно разрезать на 7 трехклеточных уголков и 4 угловых клетки (рис. 3).

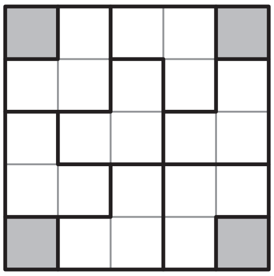

Рис. 3: к решению задачи 1/3

Таким образом сумма чисел в угловых клетках равна $125 - 7 \cdot 15 = 20$. □

Задача 2/1. Учитель математики выписал на доску трехзначное число, состоящее из различных цифр. Петя быстро посчитал, что сумма цифр числа равна 11. Вася сказал, что все цифры идут по возрастанию. А Таня обратила внимание, что разность между второй и первой цифрой на 1 больше, чем разность между третьей и второй цифрой. Какая цифра стоит в разряде десятков, если никто из ребят не ошибся?

Ответ: 4.

Решение. Пусть $\overline{abc}$ — исходное число. Из слов Пети следует, что

$$a + b + c = 11\,.$$

А из слов Тани следует, что

$$\begin{gathered} b - a = c - b + 1\,; \\ 2b - a - c = 1\,. \end{gathered}$$

Таким образом, мы получаем, что

$$\begin{gathered} 11 + 1 = (a + b + c) + (2b - a - c) = 3b\,; \\ b = 4\,. \end{gathered}$$

□

Задача 2/2. Учитель математики выписал на доску трехзначное число, состоящее из различных цифр. Петя быстро посчитал, что сумма цифр числа равна 13. Вася сказал, что все цифры идут по возрастанию. А Таня обратила внимание, что разность между второй и первой цифрой на 2 больше, чем разность между третьей и второй цифрой. Какая цифра стоит в разряде десятков, если никто из ребят не ошибся?

Ответ: 5.

Решение. Пусть $\overline{abc}$ — исходное число. Из слов Пети следует, что

$$a + b + c = 13\,.$$

А из слов Тани следует, что

$$b - a = c - b + 2\,;$$
$$2b - a - c = 2\,.$$

Таким образом, мы получаем, что

$$13 + 1 = (a + b + c) + (2b - a - c) = 3b\,;$$
$$b = 5\,.$$

□

Задача 2/3. Учитель математики выписал на доску трехзначное число, состоящее из различных цифр. Петя быстро посчитал, что сумма цифр числа равна 15. Вася сказал, что все цифры идут по возрастанию. А Таня обратила внимание, что разность между второй и первой цифрой на 3 больше, чем разность между третьей и второй цифрой. Какая цифра стоит в разряде десятков, если никто из ребят не ошибся?

Ответ: 6.

Решение. Пусть $\overline{abc}$ — исходное число. Из слов Пети следует, что

$$a + b + c = 15\,.$$

А из слов Тани следует, что

$$b - a = c - b + 3\,;$$
$$2b - a - c = 3\,.$$

Таким образом, мы получаем, что

$$15 + 3 = (a + b + c) + (2b - a - c) = 3b\,;$$
$$b = 6\,.$$

□

Задача 3/1. В подземелье живут гномы в разноцветных колпаках. Однажды 100 жителей подземелья встали в круг. Оказалось, что каждый гном стоит рядом хотя бы с одним гномом в колпаке того же цвета; при этом 58 гномов стоят между двумя гномами в колпаках того же цвета. Какое наибольшее количество гномов в красных колпаках могли иметь соседа в не красном колпаке?

Ответ: 20.

Решение. Назовем *группой* последовательность подряд стоящих гномов в одноцветных колпаках, при этом «крайние» гномы группы стоят рядом с гномами в колпаках другого цвета. Тогда весь круг состоит из нескольких групп.

При этом в каждой группе есть хотя бы два гнома, иначе в ней только один гном, тогда он стоит рядом с двумя гномами в колпаках другого цвета, что противоречит условию.

Давайте попросим 58 гномов, каждый из которых стоит между гномами в колпаках того же цвета, выйти из круга. Тогда всего осталось 42 гнома, при этом в каждой группе осталось 2 гнома.

Рассмотрим группы в красных колпаках. Заметим, что все гномы, которые сейчас в них состоят, и есть те гномы, которые имели соседа в не красном колпаке. Их количество равно удвоенному количеству «красных» групп.

Всего осталась $21 = 42 : 2$ группа. Если хотя бы 11 из них будут красными, то две красные группы будут идти подряд. Получается, что максимальное количество красных групп равно 10, то есть максимальное количество гномов в красных колпаках, которые стоят рядом с гномом в не красном колпаке, равно 20.

Приведем пример, когда это возможно. Из предыдущего решения следует, что в таком примере должно быть 10 групп гномов с красными колпаками и 11 других групп. Так и сделаем: возьмем 10 групп гномов с красными колпаками и 11 групп гномов 11 других различных цветов, и расположим их по кругу так, чтобы никакие две группы красных гномов не стояли рядом (достаточно сначала расположить 10 красных групп по кругу, а потом разделить их группами других цветов). Одну группу сделаем состоящей из 60 гномов, а остальные — из двух. □

Задача 3/2. В подземелье живут гномы в разноцветных колпаках. Однажды 105 жителей подземелья встали в круг. Оказалось, что каждый гном стоит рядом хотя бы с одним гномом в колпаке того же цвета; при этом 67 гномов стоят между двумя гномами в колпаках того же цвета. Какое наибольшее количество гномов в красных колпаках могли иметь соседа в не красном колпаке?

Ответ: 18.

Решение. Назовем *группой* последовательность подряд стоящих гномов в одноцветных колпаках, при этом «крайние» гномы группы стоят рядом с гномами в колпаках другого цвета. Тогда весь круг состоит из нескольких групп.

При этом в каждой группе есть хотя бы два гнома, иначе в ней только один гном, тогда он стоит рядом с двумя гномами в колпаках другого цвета, что противоречит условию.

Давайте попросим 67 гномов, каждый из которых стоит между гномами в колпаках того же цвета, выйти из круга. Тогда всего осталось 38 гномов, при этом в каждой группе осталось 2 гнома.

Рассмотрим группы в красных колпаках. Заметим, что все гномы, которые сейчас в них состоят, и есть те гномы, которые имели соседа в не красном колпаке. Их количество равно удвоенному количеству «красных» групп.

Всего осталось $19 = 38 : 2$ групп. Если хотя бы 10 из них будут красными, то две красные группы будут идти подряд. Получается, что максимальное количество красных групп равно 9, то есть максимальное количество гномов в красных колпаках, которые стоят рядом с гномом в не красном колпаке, равно 18.

Приведем пример, когда это возможно. Из предыдущего решения следует, что в таком примере должно быть 9 групп гномов с красными колпаками и 10 других групп. Так и сделаем: возьмем 9 групп гномов с красными колпаками и 10 групп гномов 10 других различных цветов, и расположим их по кругу так, чтобы никакие две группы красных гномов не стояли рядом (достаточно сначала расположить 9 красных групп по кругу, а потом разделить их группами других цветов). Одну группу сделаем состоящей из 69 гномов, а остальные — из двух. □

Задача 3/3. В подземелье живут гномы в разноцветных колпаках. Однажды 95 жителей подземелья встали в круг. Оказалось, что каждый гном стоит рядом хотя бы с одним гномом в колпаке того же цвета; при этом 49 гномов стоят между двумя гномами в колпаках того же цвета. Какое наибольшее количество гномов в красных колпаках могли иметь соседа в не красном колпаке?

Ответ: 22.

Решение. Назовем *группой* последовательность подряд стоящих гномов в одноцветных колпаках, при этом «крайние» гномы группы стоят рядом с гномами в колпаках другого цвета. Тогда весь круг состоит из нескольких групп.

При этом в каждой группе есть хотя бы два гнома, иначе в ней только один гном, тогда он стоит рядом с двумя гномами в колпаках другого цвета, что противоречит условию.

Давайте попросим 49 гномов, каждый из которых стоит между гномами в колпаках того же цвета, выйти из круга. Тогда всего осталось 46 гномов, при этом в каждой группе осталось 2 гнома.

Рассмотрим группы в красных колпаках. Заметим, что все гномы, которые сейчас в них состоят, и есть те гномы, которые имели соседа в не красном колпаке. Их количество равно удвоенному количеству «красных» групп.

Всего осталось $23 = 46 : 2$ группы. Если хотя бы 12 из них будут красными, то две красные группы будут идти подряд. Получается, что максимальное количество красных групп равно 11, то есть максимальное количество гномов в красных колпаках, которые стоят рядом с гномом в не красном колпаке, равно 22.

Приведем пример, когда это возможно. Из предыдущего решения следует, что в таком примере должно быть 11 групп гномов с красными колпаками и 12 других групп. Так и сделаем: возьмем 11 групп гномов с красными колпаками и 12 групп гномов 12 других различных цветов, и расположим их по кругу так, чтобы никакие две группы красных гномов не стояли рядом (достаточно сначала расположить 11 красных групп по кругу, а потом разделить их группами других цветов). Одну группу сделаем состоящей из 51 гнома, а остальные — из двух. □

Задача 4/1. Малыш и Карлсон едят пряники с молоком. Малыш выпивает один стакан молока за некоторое целое число секунд, а Карлсон выпивает его в три раза медленее. При этом Малыш ест 5 пряников в минуту, а Карлсон 6 пряников в минуту. Одновременно есть пряники и пить молоко ни один из них не может. Спустя некоторое время они выпили по одинаковому количеству стаканов молока (каждый выпил больше одного стакана) и съели по 7 пряников. Сколько стаканов молока выпил Малыш?

Ответ: 7.

Решение. Малыш съедает один пряник за 12 секунд, то есть на 7 пряников у него ушло 84 секунды. Карлсон съедает пряник за 10 секунд, и у него на 7 пряников ушло 70 секунд. Пусть Малыш потратил на молоко x секунд; Карлсон тогда потратил $3x$. Суммарное время у них совпадает:

$$x + 84 = 3x + 70\,,$$

откуда получаем $14 = 2x$, то есть $x = 7$. Так как на каждый стакан у Малыша уходит целое число секунд, то он мог выпить либо один стакан, либо семь, так как 7 секунд не делятся ни на какие другие числа. Но по условию выпитых стаканов было больше одного, так что ответ — семь. □

Задача 4/2. Малыш и Карлсон едят пряники с молоком. Малыш выпивает один стакан молока за некоторое целое число секунд, а Карлсон выпивает его в четыре раза медленее. При этом Малыш ест 4 пряника в минуту, а Карлсон 5 пряников в минуту. Одновременно есть пряники и пить молоко ни один из них не может. Спустя некоторое время они выпили по одинаковому количеству стаканов молока (каждый выпил больше одного стакана) и съели по 5 пряников. Сколько стаканов молока выпил Малыш?

Ответ: 5.

Решение. Малыш съедает один пряник за 15 секунд, то есть на 5 пряников у него ушло 75 секунд. Карлсон съедает пряник за 12 секунд, и у него на 5 пряников ушло 60 секунд. Пусть Малыш потратил на молоко x секунд; Карлсон тогда потратил $4x$. Суммарное время у них совпадает:

$$x + 75 = 4x + 60\,,$$

откуда получаем $15 = 3x$, то есть $x = 5$. Так как на каждый стакан у Малыша уходит целое число секунд, то он мог выпить либо один стакан, либо пять, так как 5 секунд не делятся ни на какие другие числа. Но по условию выпитых стаканов было больше одного, так что ответ — пять. □

Задача 5/1. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно выписать на доску так, чтобы произведение любых четырех из них делилось на 210, но при этом никакое из них не делилось на 210?

Ответ: 12.

Решение. Заметим, что число делится на 210 тогда и только тогда, когда оно делится на 2, на 3, на 5 и на 7.

Предположим, что на доску можно выписать хотя бы 13 чисел. Тогда среди них не более трех чисел не делятся на 2 (иначе есть четыре числа, чье произведение не делится на 2, а следовательно, не делится на 210), не более трех не делятся на 3, не более трех не делятся на 5, не более трех не делятся на 7. Получается, что максимум 12 чисел не делятся хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5, 7. Таким образом, есть хотя бы одно число, делящееся на 210. Противоречие.

Пример для 12 чисел:

$a_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x,\qquad a_2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot y,\qquad a_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot z,$
$a_4 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot x,\qquad a_5 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot y,\qquad a_6 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot z,$
$a_7 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x,\qquad a_8 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot y,\qquad a_9 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot z,$
$a_{10} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x,\qquad a_{11} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot y,\qquad a_{12} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot z,$

где в качестве x, y, z достаточно взять три различных «больших» простых числа, например, $x = 29$, $y = 31$, $z = 37$. □

Задача 5/2. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно выписать на доску так, чтобы произведение любых пяти из них делилось на 330, но при этом никакое из них не делилось на 330?

Ответ: 16.

Решение. Заметим, что число делится на 330 тогда и только тогда, когда оно делится на 2, на 3, на 5 и на 11.

Предположим, что на доску можно выписать хотя бы 17 чисел. Тогда среди них не более четырех чисел не делятся на 2 (иначе есть пять чисел, чье произведение не делится на 2, а следовательно, не делится на 210), не более четырех не делятся на 3, не более четырех не делятся на 5, не более четырех не делятся на 11. Получается, что максимум 16 чисел не делятся хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5, 11. Таким образом, есть хотя бы одно число, делящееся на 330. Противоречие.

Пример для 16 чисел:

$a_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x,\qquad a_2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot y,\qquad a_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot z,\qquad a_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot t,$
$a_5 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot x,\qquad a_6 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot y,\qquad a_7 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot z,\qquad a_8 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot t,$
$a_9 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot x,\qquad a_{10} = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot y,\qquad a_{11} = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot z,\qquad a_{12} = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot t,$
$a_{13} = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot x,\qquad a_{14} = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot y,\qquad a_{15} = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot z,\qquad a_{16} = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot t,$

где в качестве x, y, z, t достаточно взять три различных «больших» простых числа. Например $x = 29$, $y = 31$, $z = 37$, $t = 41$. □

Задача 6/1. У караванщика есть 8 верблюдов. На одном из них сидит одна блоха, на втором — две блохи, на третьем — три блохи, ..., на 8-м верблюде сидят 8 блох. Сколько существует способов расставить верблюдов в колонну так, чтобы ровно у одного верблюда было блох больше, чем его порядковый номер в колонне?

Ответ: 247.

Решение. Сначала посчитаем количество способов расставить верблюдов, если верблюд с номером m имеет n блох, $n > m$ (соответственно, у всех остальных верблюдов количество блох не превышает их номер).

Тогда верблюд с 8 блохами может стоять только на 8-м месте (если $n < 8$), с 7 блохами — на 7-м, ..., с $n+1$ блохами — на $(n+1)$-м месте. Аналогично, на 1-м месте может стоять только верблюд с 1 блохой (если $m > 1$), на 2-м — с 2 блохами, ..., на $(m-1)$-м месте стоит верблюд с $m-1$ блохами.

Осталось посчитать возможные расположения верблюдов с количествами блох от m до $n-1$, ведь остальные уже расставлены однозначно. Верблюд с $n-1$ блохами может стоять только на n-м или $(n-1)$-м месте, так как все бо́льшие позиции уже заняты — это дает нам два варианта расположения. Верблюд с $n-2$ блохами, аналогично, может стоять на любой из трех позиций от $n-2$ до n, кроме той, что уже занята предыдущим верблюдом — это опять два варианта, и т. д. Верблюд с $n-k$ блохами, где $n-k > m$, может располагаться на позициях от $n-k$ до n, из которых $k-1$ позиций уже заняты верблюдами, рассмотренными до этого — это снова два варианта расположения.

Наконец, верблюду с m блохами останется только одна позиция. Всего получилось 2^{n-m-1} вариантов.

Нарисуем таблицу 8×8, и в клетку с номером строки n и столбца m впишем 2^{n-m-1}, если $n > m$. Осталось просуммировать все эти числа. В строке с номером $n > 1$ располагаются числа $2^{n-2}, 2^{n-3}, \ldots, 1$, и сумма в ней равна $2^{n-1}-1$. Суммируя все строки, получаем

$$\begin{aligned} &2^7 - 1 + 2^6 - 1 + \ldots + 2^2 - 1 + 2^1 - 1 = \\ &\quad = (2^7 + 2^6 + \ldots + 2^1) - (1 + 1 + \ldots + 1) = 2^8 - 9\,. \end{aligned}$$

□

Задача 6/2. У караванщика есть 7 верблюдов. На одном из них сидит одна блоха, на втором — две блохи, на третьем — три блохи, ..., на 7-м верблюде сидят 7 блох. Сколько существует способов расставить верблюдов в колонну так, чтобы ровно у одного верблюда было блох больше, чем его порядковый номер в колонне?

Ответ: 120.

Решение. Сначала посчитаем количество способов расставить верблюдов, если верблюд с номером m имеет n блох, $n > m$ (соответственно, у всех остальных верблюдов количество блох не превышает их номер).

Тогда верблюд с 7 блохами может стоять только на 7-м месте (если $n < 7$), с 6 блохами — на 6-м, $\ldots$, с $n+1$ блохами — на $(n+1)$-м месте. Аналогично, на 1-м месте может стоять только верблюд с 1 блохой (если $m > 1$), на 2-м — с 2 блохами, $\ldots$, на $(m-1)$-м месте стоит верблюд с $m-1$ блохами.

Осталось посчитать возможные расположения верблюдов с количествами блох от m до $n-1$, ведь остальные уже расставлены однозначно. Верблюд с $n-1$ блохами может стоять только на n-м или $(n-1)$-м месте, так как все бóльшие позиции уже заняты — это дает нам два варианта расположения. Верблюд с $n-2$ блохами, аналогично, может стоять на любой из трех позиций от $n-2$ до n, кроме той, что уже занята предыдущим верблюдом — это опять два варианта, и т. д. Верблюд с $n-k$ блохами, где $n-k > m$, может располагаться на позициях от $n-k$ до n, из которых $k-1$ позиций уже заняты верблюдами, рассмотренными до этого — это снова два варианта расположения.

Наконец, верблюду с m блохами останется только одна позиция. Всего получилось 2^{n-m-1} вариантов.

Нарисуем таблицу 7×7, и в клетку с номером строки n и столбца m впишем 2^{n-m-1}, если $n > m$. Осталось просуммировать все эти числа. В строке с номером $n > 1$ располагаются числа $2^{n-2}, 2^{n-3}, \ldots, 1$, и сумма в ней равна $2^{n-1} - 1$. Суммируя все строки, получаем

$$\begin{aligned} &2^6 - 1 + 2^5 - 1 + \ldots + 2^2 - 1 + 2^1 - 1 = \\ &\quad = (2^6 + 2^5 + \ldots + 2^1) - (1 + 1 + \ldots + 1) = 2^7 - 8\,. \end{aligned} \qquad \square$$