10–11 классы

Задача 1/1. Среднее арифметическое девяти неотрицательных чисел равно 20. Какое наибольшее значение может принимать среднее из них по величине?

Ответ: 36.

Решение. Упорядочим числа: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_9$. Требуется найти максимальное возможное значение числа a_5. Непосредственно из условия вытекает, что сумма чисел равна 180, а значит

$$5a_5 \leqslant a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 180 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 \leqslant 180\,,$$

откуда следует требуемая оценка. Примером служит набор $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, $a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 36$. □

Задача 1/2. Среднее арифметическое девяти неотрицательных чисел равно 10. Какое наибольшее значение может принимать среднее из них по величине?

Ответ: 18.

Решение. Упорядочим числа: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_9$. Требуется найти максимальное возможное значение числа a_5. Непосредственно из условия вытекает, что сумма чисел равна 90, а значит

$$5a_5 \leqslant a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 90 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 \leqslant 90\,,$$

откуда следует требуемая оценка. Примером служит набор $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, $a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 18$. □

Задача 1/3. Среднее арифметическое одиннадцати неотрицательных чисел равно 12. Какое наибольшее значение может принимать среднее из них по величине?

Ответ: 22.

Решение. Упорядочим числа: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{11}$. Требуется найти максимальное возможное значение числа a_6. Непосредственно из условия вытекает, что сумма чисел равна 132, а значит

$$6a_6 \leqslant a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 132 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 \leqslant 132\,,$$

откуда следует требуемая оценка. Примером служит набор $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$, $a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_{11} = 22$. □

Задача 1/4. Среднее арифметическое одиннадцати неотрицательных чисел равно 24. Какое наибольшее значение может принимать среднее из них по величине?

Ответ: 44.

Решение. Упорядочим числа: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{11}$. Требуется найти максимальное возможное значение числа a_6. Непосредственно из условия вытекает, что сумма чисел равна 264, а значит

$$6a_6 \leqslant a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 264 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 \leqslant 264\,,$$

откуда следует требуемая оценка. Примером служит набор $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$, $a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_{11} = 44$. □

Задача 2/1. Сколько различных натуральных решений имеет уравнение

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{x}{8}\right] + 507 = x\,?$$

Ответ: 8.

Решение. Пусть $x = 8k + m$, где k целое и $0 \leqslant m \leqslant 7$. Тогда уравнение переписывается в виде

$$4k + \left[\frac{m}{2}\right] + 2k + \left[\frac{m}{4}\right] + k + \left[\frac{m}{8}\right] + 507 = 8k + m\,,$$

или, после сокращения,

$$\left[\frac{m}{2}\right] + \left[\frac{m}{4}\right] + \left[\frac{m}{8}\right] + 507 = k + m\,.$$

Заметим, что если m фиксировано, то k существует и определяется однозначно. Разным $m \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ соответствуют различные $x = 8k + m$. Следовательно, различных x столько же, сколько и различных m, то есть 8. □

Задача 2/2. Сколько различных натуральных решений имеет уравнение

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{x}{8}\right] + 608 = x\,?$$

Ответ: 8.

Решение. Пусть $x = 8k + m$, где k целое и $0 \leqslant m \leqslant 7$. Тогда уравнение переписывается в виде

$$4k + \left[\frac{m}{2}\right] + 2k + \left[\frac{m}{4}\right] + k + \left[\frac{m}{8}\right] + 608 = 8k + m\,,$$

или, после сокращения,

$$\left[\frac{m}{2}\right] + \left[\frac{m}{4}\right] + \left[\frac{m}{8}\right] + 608 = k + m\,.$$

Заметим, что если m фиксировано, то k существует и определяется однозначно. Разным $m \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ соответствуют различные $x = 8k + m$. Следовательно, различных x столько же, сколько и различных m, то есть 8. □

Задача 2/3. Сколько различных натуральных решений имеет уравнение

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{x}{8}\right] + 709 = x\,?$$

Ответ: 8.

Решение. Пусть $x = 8k + m$, где k целое и $0 \leqslant m \leqslant 7$. Тогда уравнение переписывается в виде

$$4k + \left[\frac{m}{2}\right] + 2k + \left[\frac{m}{4}\right] + k + \left[\frac{m}{8}\right] + 709 = 8k + m\,,$$

или, после сокращения,

$$\left[\frac{m}{2}\right] + \left[\frac{m}{4}\right] + \left[\frac{m}{8}\right] + 709 = k + m\,.$$

Заметим, что если m фиксировано, то k существует и определяется однозначно. Разным $m \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ соответствуют различные $x = 8k + m$. Следовательно, различных x столько же, сколько и различных m, то есть 8. □

Задача 2/4. Сколько различных натуральных решений имеет уравнение

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{x}{8}\right] + 810 = x\,?$$

Ответ: 8.

Решение. Пусть $x = 8k + m$, где k целое и $0 \leqslant m \leqslant 7$. Тогда уравнение переписывается в виде

$$4k + \left[\frac{m}{2}\right] + 2k + \left[\frac{m}{4}\right] + k + \left[\frac{m}{8}\right] + 810 = 8k + m\,,$$

или, после сокращения,

$$\left[\frac{m}{2}\right] + \left[\frac{m}{4}\right] + \left[\frac{m}{8}\right] + 810 = k + m\,.$$

Заметим, что если m фиксировано, то k существует и определяется однозначно. Разным $m \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ соответствуют различные $x = 8k + m$. Следовательно, различных x столько же, сколько и различных m, то есть 8. □

Задача 3/1. Из квадрата 218×218 вырезали квадратик 2×2 так, что оставшуюся фигуру удалось разрезать на прямоугольники 1×5. На каком минимальном расстоянии от края доски может находиться квадратик, если сторона клетки равна 1 см? (Ответ дайте в сантиметрах.)

Ответ: 3.

Решение. Расставим в клетках доски натуральные числа следующим образом: первую строку заполним единицами, вторую — двойками, третью — тройками, и т. д., в каждую клетку последней строки поставим число 218. Тогда в каждом прямоугольнике 1×5 сумма чисел делится на 5. Действительно, это утверждение очевидно для горизонтальных прямоугольников, а для вертикальных сумма всегда имеет вид

$$k + (k+1) + (k+2) + (k+3) + (k+4) = 5k + 10$$

для некоторого натурального k и тоже кратна 5. Следовательно, сумма чисел в квадратике 2×2 должна иметь тот же остаток от деления на 5, что и сумма чисел во всем квадрате. Сумма всех чисел вычисляется по формуле

$$218(1 + 2 + \ldots + 218) = \frac{218 \cdot 218 \cdot 219}{2} = 109 \cdot 218 \cdot 219\,.$$

Нетрудно видеть, что остаток от деления полученного числа на 5 равен остатку от деления $4 \cdot 3 \cdot 4$ на 5, то есть 3. Такой остаток в квадрате 2×2 с учетом расстановки чисел можно получить, только если в нем стоят два числа с остатком 4 и два числа с остатком 0. Следовательно, от верхнего края большого квадрата квадратик отделяют минимум три строки. Аналогичное утверждение верно и для трех других сторон.

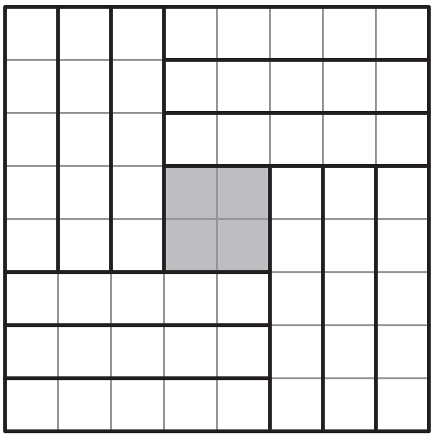

Рис. 13: к решению задачи 3/1

Осталось привести пример расположения квадратика на расстоянии трех клеток от края и разрезание оставшейся части на прямоугольники 1×5. Легко придумать такое разрезание для квадрата 8×8 — надо вырезать из него центральный квадрат 2×2, оставшаяся часть легко разобьется на прямоугольники 1×5 (рис. 13). Далее из квадрата 218×218 удаляем квадрат 8×8, расположенный в углу, после чего оставшаяся часть представляется в виде объединения прямоугольников 8×210 и 210×8 и квадрата 210×210. Все они легко разрезаются на прямоугольники 1×5, так как 210 делится на 5. □

Задача 3/2. Из квадрата 418×418 вырезали квадратик 2×2 так, что оставшуюся фигуру удалось разрезать на прямоугольники 1×5. На каком минимальном расстоянии от края доски может находиться квадратик, если сторона клетки равна 1 см? (Ответ дайте в сантиметрах.)

Ответ: 3.

Решение. Расставим в клетках доски натуральные числа следующим образом: первую строку заполним единицами, вторую — двойками, третью — тройками, и т. д., в каждую клетку последней строки поставим число 418. Тогда в каждом прямоугольнике 1×5 сумма чисел делится на 5. Действительно, это утверждение очевидно для горизонтальных прямоугольников, а для вертикальных сумма всегда имеет вид

$$k + (k+1) + (k+2) + (k+3) + (k+4) = 5k + 10$$

для некоторого натурального k и тоже кратна 5. Следовательно, сумма чисел в квадратике 2×2 должна иметь тот же остаток от деления на 5, что и сумма чисел во всем квадрате. Сумма всех чисел вычисляется по формуле

$$418(1 + 2 + \ldots + 418) = \frac{418 \cdot 418 \cdot 419}{2} = 209 \cdot 418 \cdot 419\,.$$

Нетрудно видеть, что остаток от деления полученного числа на 5 равен остатку от деления $4 \cdot 3 \cdot 4$ на 5, то есть 3. Такой остаток в квадрате 2×2 с учетом расстановки чисел можно получить, только если в нем стоят два числа с остатком 4 и два числа с остатком 0. Следовательно, от верхнего края большого квадрата квадратик отделяют минимум три строки. Аналогичное утверждение верно и для трех других сторон.

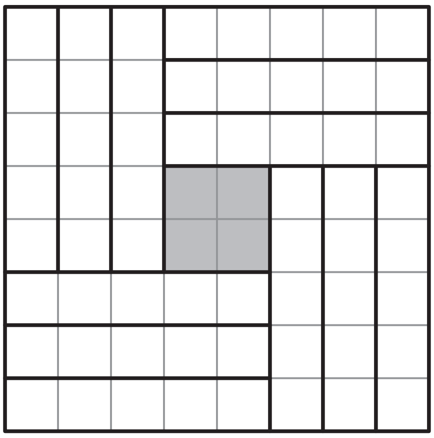

Рис. 14: к решению задачи 3/2

Осталось привести пример расположения квадратика на расстоянии трех клеток от края и разрезание оставшейся части на прямоугольники 1×5. Легко придумать такое разрезание для квадрата 8×8 — надо вырезать из него центральный квадрат 2×2, оставшаяся часть легко разобьется на прямоугольники 1×5 (рис. 14). Далее из квадрата 418×418 удаляем квадрат 8×8, расположенный в углу, после чего оставшаяся часть представляется в виде объединения прямоугольников 8×410 и 410×8 и квадрата 410×410. Все они легко разрезаются на прямоугольники 1×5, так как 410 делится на 5. $\square$

Задача 3/3. Из квадрата 698×698 вырезали квадратик 2×2 так, что оставшуюся фигуру удалось разрезать на прямоугольники 1×7. На каком минимальном расстоянии от края доски может находиться квадратик, если сторона клетки равна 1 см? (Ответ дайте в сантиметрах.)

Ответ: 5.

Решение. Расставим в клетках доски натуральные числа следующим образом: первую строку заполним единицами, вторую — двойками, третью — тройками, и т. д., в каждую клетку последней строки поставим число 698. Тогда в каждом прямоугольнике 1×7 сумма чисел делится на 7. Действительно, это утверждение очевидно для горизонтальных прямоугольников, а для вертикальных сумма всегда имеет вид

$$k + (k+1) + (k+2) + \ldots + (k+6) = 7k + 21$$

для некоторого натурального k и тоже кратна 5. Следовательно, сумма чисел в квадратике 2×2 должна иметь тот же остаток от деления на 7, что и сумма чисел во всем квадрате. Сумма всех чисел вычисляется по формуле

$$698(1 + 2 + \ldots + 698) = \frac{698 \cdot 698 \cdot 699}{2} = 349 \cdot 698 \cdot 699\,.$$

Нетрудно видеть, что остаток от деления полученного числа на 7 равен остатку от деления $6 \cdot 5 \cdot 6$ на 7, то есть 5. Такой остаток в квадрате 2×2 с учетом расстановки чисел можно получить, только если в нем стоят два числа с остатком 6 и два числа с остатком 0. Следовательно, от верхнего края большого квадрата квадратик отделяют минимум пять строк. Аналогичное утверждение верно и для трех других сторон.

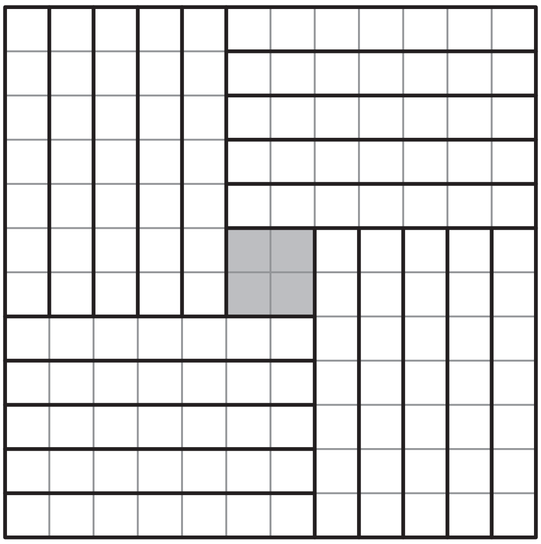

Рис. 15: к решению задачи 3/3

Осталось привести пример расположения квадратика на расстоянии пяти клеток от края и разрезание оставшейся части на прямоугольники 1×7. Легко придумать такое разрезание для квадрата 12×12 — надо вырезать из него центральный квадрат 2×2, оставшаяся часть легко разобьется на прямоугольники 1×7 (рис. 14). Далее из квадрата 698×698 удаляем квадрат 12×12, расположенный в углу, после чего оставшаяся часть представляется в виде объединения прямоугольников 12×686 и 686×12 и квадрата 686×686. Все они легко разрезаются на прямоугольники 1×7, так как 686 делится на 7. □

Задача 3/4. Из квадрата 418×418 вырезали квадратик 2×2 так, что оставшуюся фигуру удалось разрезать на прямоугольники 1×7. На каком минимальном расстоянии от края доски может находиться квадратик, если сторона клетки равна 1 см? (Ответ дайте в сантиметрах.)

Ответ: 5.

Решение. Расставим в клетках доски натуральные числа следующим образом: первую строку заполним единицами, вторую — двойками, третью — тройками, и т. д., в каждую клетку последней строки поставим число 418. Тогда в каждом прямоугольнике 1×7 сумма чисел делится на 7. Действительно, это утверждение очевидно для горизонтальных прямоугольников, а для вертикальных сумма всегда имеет вид

$$k + (k+1) + (k+2) + \ldots + (k+6) = 7k + 21$$

для некоторого натурального k и тоже кратна 5. Следовательно, сумма чисел в квадратике 2×2 должна иметь тот же остаток от деления на 7, что и сумма чисел во всем квадрате. Сумма всех чисел вычисляется по формуле

$$418(1 + 2 + \ldots + 418) = \frac{418 \cdot 418 \cdot 419}{2} = 209 \cdot 418 \cdot 419\,.$$

Нетрудно видеть, что остаток от деления полученного числа на 7 равен остатку от деления $6 \cdot 5 \cdot 6$ на 7, то есть 5. Такой остаток в квадрате 2×2 с учетом расстановки чисел можно получить, только если в нем стоят два числа с остатком 6 и два числа с остатком 0. Следовательно, от верхнего края большого квадрата квадратик отделяют минимум пять строк. Аналогичное утверждение верно и для трех других сторон.

Осталось привести пример расположения квадратика на расстоянии пяти клеток от края и разрезание оставшейся части на прямоугольники 1×7. Легко придумать такое разрезание для квадрата 12×12 — надо вырезать из него центральный квадрат 2×2, оставшаяся часть легко разобьется на прямоугольники 1×7 (рис. 16). Далее из квадрата 418×418 удаляем квадрат 12×12, расположенный в углу, после чего оставшаяся часть представляется в виде объединения прямоугольников 12×406 и 406×12 и квадрата 406×406. Все они легко разрезаются на прямоугольники 1×7, так как 406 делится на 7. □

Задача 4/1. Найдите наименьшее возможное значение натурального числа n, при котором число

$$A = \sqrt{99 + \sqrt{n}} + \sqrt{99 - \sqrt{n}}$$

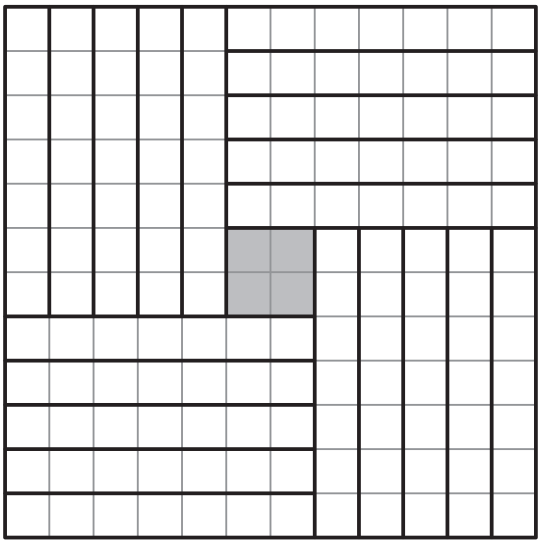

Рис. 16: к решению задачи 3/4

является целым.

Ответ: 5832.

Решение. Возведем число A в квадрат и получим, что величина

$$A^2 = 99 + \sqrt{n} + 99 - \sqrt{n} + 2\sqrt{99^2 - n} = 2 \cdot 99 + 2\sqrt{99^2 - n}$$

является целой, причем квадратом натурального числа. Это возможно только когда выражение $B = \sqrt{99^2 - n}$ целое. Поскольку $B < 99$, то A^2 — четный квадрат, меньший $4 \cdot 99$. Следовательно, $A^2 \leqslant 324 = 18^2$ и $B \leqslant 63$. В итоге,

$$n \geqslant 99^2 - 63^2 = 5832.$$

Из приведенных рассуждений следует, что $n = 5832$ подходит. □

Задача 4/2. Найдите наименьшее возможное значение натурального числа n, при котором число

$$A = \sqrt{98 + \sqrt{n}} + \sqrt{98 - \sqrt{n}}$$

является целым.

Ответ: 5508.

Решение. Возведем число A в квадрат и получим, что величина

$$A^2 = 98 + \sqrt{n} + 98 - \sqrt{n} + 2\sqrt{98^2 - n} = 2 \cdot 98 + 2\sqrt{98^2 - n}$$

является целой, причем квадратом натурального числа. Это возможно только когда выражение $B = \sqrt{98^2 - n}$ целое. Поскольку $B < 98$, то A^2 — четный квадрат, меньший $4 \cdot 98$. Следовательно, $A^2 \leqslant 324 = 18^2$ и $B \leqslant 64$. В итоге,

$$n \geqslant 98^2 - 64^2 = 5508.$$

Из приведенных рассуждений следует, что $n = 5508$ подходит. □

Задача 4/3. Найдите наименьшее возможное значение натурального числа n, при котором число
$$A=\sqrt{97+\sqrt{n}}+\sqrt{97-\sqrt{n}}$$
является целым.

Ответ: 5184.

Решение. Возведем число A в квадрат и получим, что величина
$$A^2=97+\sqrt{n}+97-\sqrt{n}+2\sqrt{97^2-n}=2\cdot 97+2\sqrt{97^2-n}$$
является целой, причем квадратом натурального числа. Это возможно только когда выражение $B=\sqrt{97^2-n}$ целое. Поскольку $B<95$, то A^2 — четный квадрат, меньший $4\cdot 97$. Следовательно, $A^2\leqslant 324=18^2$ и $B\leqslant 65$. В итоге,
$$n\geqslant 97^2-65^2=5184.$$
Из приведенных рассуждений следует, что $n=5832$ подходит. $\square$

Задача 4/4. Найдите наименьшее возможное значение натурального числа n, при котором число
$$A=\sqrt{96+\sqrt{n}}+\sqrt{96-\sqrt{n}}$$
является целым.

Ответ: 4860.

Решение. Возведем число A в квадрат и получим, что величина
$$A^2=96+\sqrt{n}+96-\sqrt{n}+2\sqrt{96^2-n}=2\cdot 96+2\sqrt{96^2-n}$$
является целой, причем квадратом натурального числа. Это возможно только когда выражение $B=\sqrt{96^2-n}$ целое. Поскольку $B<96$, то A^2 — четный квадрат, меньший $4\cdot 96$. Следовательно, $A^2\leqslant 324=18^2$ и $B\leqslant 66$. В итоге,
$$n\geqslant 96^2-66^2=4860.$$
Из приведенных рассуждений следует, что $n=5832$ подходит. $\square$

Задача 5/1. Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается граней BCD, CAD и ABD в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Известно, что $\angle BA_1D=115^\circ$, $\angle CB_1D=130^\circ$. Найдите $\angle AC_1D$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 115.

Решение. Пусть D_1 — точка касания сферы и грани ABC и $\angle AC_1D=\varphi$. Заметим, что треугольники BA_1D и BC_1D равны по трем сторонам ($BA_1=BC_1$ — касательные к сфере из точки B, $DA_1=DC_1$ — касательные к сфере из точки D, BD — общая сторона). Следовательно, $\angle BA_1D=\angle BC_1D=115^\circ$ (рис. 17). Аналогично равны углы, под которыми видно любое ребро тетраэдра из точек

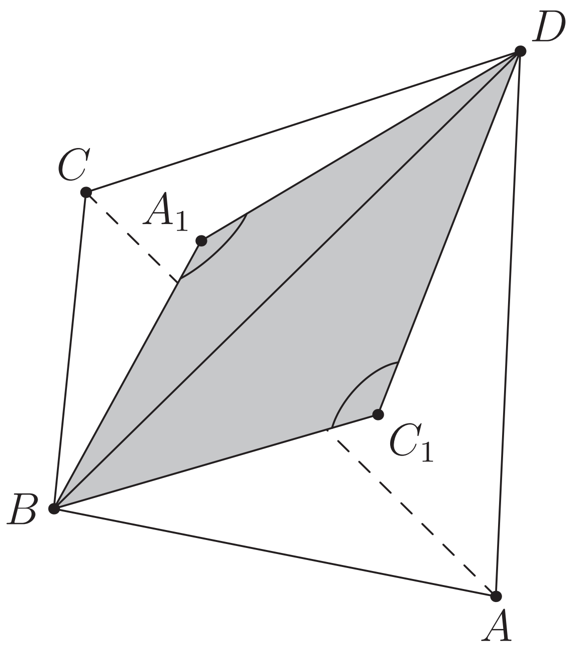

Рис. 17: к решению задачи 5/1

касания прилегающих к нему граней. В частности, $\angle CB_1D = \angle CA_1D = 130^\circ$ и $\angle AC_1D = \angle AB_1D = \varphi$. Кроме того, верны соотношения

$$\angle BA_1D + \angle DA_1C + \angle CA_1B = 360^\circ\,,$$
$$\angle BC_1D + \angle DC_1A + \angle AC_1B = 360^\circ\,,$$
$$\angle CB_1D + \angle DB_1A + \angle AB_1C = 360^\circ\,,$$

из которых заключаем, что

$$\angle CD_1B = \angle CA_1B = 360^\circ - 115^\circ - 130^\circ = 115^\circ\,,$$
$$\angle BD_1A = \angle BC_1A = 360^\circ - 115^\circ - \varphi = 245^\circ - \varphi\,,$$
$$\angle AD_1B = \angle AC_1B = 360^\circ - 130^\circ - \varphi = 230^\circ - \varphi\,.$$

Осталось сложить три полученных равенства и получить уравнение на φ:

$$360^\circ = 115^\circ + 245^\circ - \varphi + 230^\circ - \varphi\,,$$

из которого следует ответ. □

Задача 5/2. Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается граней BCD, CAD и ABD в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Известно, что $\angle BA_1D = 115^\circ$, $\angle CB_1D = 120^\circ$. Найдите $\angle AC_1D$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 125.

Решение. Пусть D_1 — точка касания сферы и грани ABC и $\angle AC_1D = \varphi$. Заметим, что треугольники BA_1D и BC_1D равны по трем сторонам ($BA_1 = BC_1$ — касательные к сфере из точки B, $DA_1 = DC_1$ — касательные к сфере из точки D, BD — общая сторона). Следовательно, $\angle BA_1D = \angle BC_1D = 115^\circ$ (рис. 18).

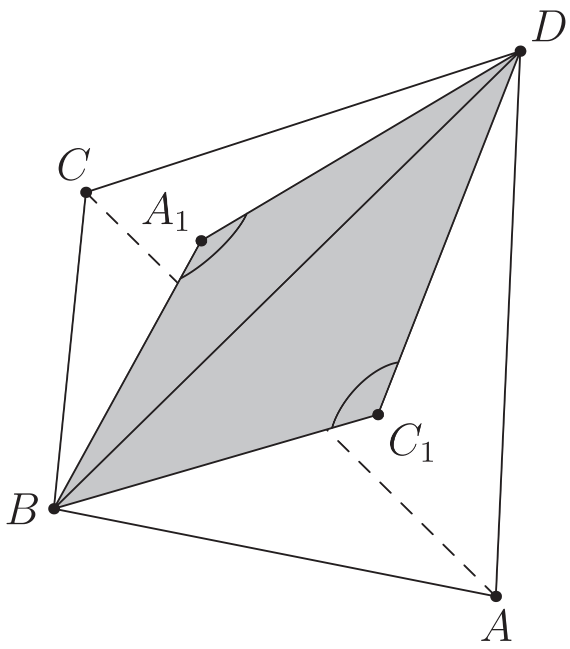

Рис. 18: к решению задачи 5/2

Аналогично равны углы, под которыми видно любое ребро тетраэдра из точек касания прилегающих к нему граней. В частности, $\angle CB_1D = \angle CA_1D = 120°$ и $\angle AC_1D = \angle AB_1D = \varphi$. Кроме того, верны соотношения

$$\angle BA_1D + \angle DA_1C + \angle CA_1B = 360°\,,$$
$$\angle BC_1D + \angle DC_1A + \angle AC_1B = 360°\,,$$
$$\angle CB_1D + \angle DB_1A + \angle AB_1C = 360°\,,$$

из которых заключаем, что

$$\angle CD_1B = \angle CA_1B = 360° - 115° - 120° = 125°\,,$$
$$\angle BD_1A = \angle BC_1A = 360° - 115° - \varphi = 245° - \varphi\,,$$
$$\angle AD_1B = \angle AC_1B = 360° - 120° - \varphi = 240° - \varphi\,.$$

Осталось сложить три полученных равенства и получить уравнение на φ:

$$360° = 125° + 245° - \varphi + 240° - \varphi\,,$$

из которого следует ответ. □

Задача 5/3. Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается граней BCD, CAD и ABD в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Известно, что $\angle BA_1D = 115°$, $\angle CB_1D = 125°$. Найдите $\angle AC_1D$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 120.

Решение. Пусть D_1 — точка касания сферы и грани ABC и $\angle AC_1D = \varphi$. Заметим, что треугольники BA_1D и BC_1D равны по трем сторонам ($BA_1 = BC_1$ — касательные к сфере из точки B, $DA_1 = DC_1$ — касательные к сфере из точки

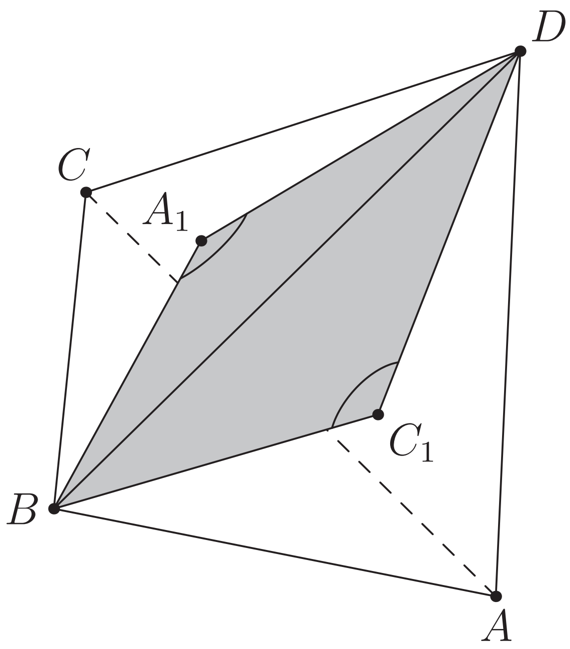

Рис. 19: к решению задачи 5/3

D, BD — общая сторона). Следовательно, $\angle BA_1D = \angle BC_1D = 115°$ (рис. 19). Аналогично равны углы, под которыми видно любое ребро тетраэдра из точек касания прилегающих к нему граней. В частности, $\angle CB_1D = \angle CA_1D = 125°$ и $\angle AC_1D = \angle AB_1D = \varphi$. Кроме того, верны соотношения

$$\angle BA_1D + \angle DA_1C + \angle CA_1B = 360°\,,$$
$$\angle BC_1D + \angle DC_1A + \angle AC_1B = 360°\,,$$
$$\angle CB_1D + \angle DB_1A + \angle AB_1C = 360°\,,$$

из которых заключаем, что

$$\angle CD_1B = \angle CA_1B = 360° - 115° - 125° = 120°\,,$$
$$\angle BD_1A = \angle BC_1A = 360° - 115° - \varphi = 245° - \varphi\,,$$
$$\angle AD_1B = \angle AC_1B = 360° - 125° - \varphi = 235° - \varphi\,.$$

Осталось сложить три полученных равенства и получить уравнение на φ:

$$360° = 120° + 245° - \varphi + 235° - \varphi\,,$$

из которого следует ответ. □

Задача 5/4. Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается граней BCD, CAD и ABD в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Известно, что $\angle BA_1D = 125°$, $\angle CB_1D = 130°$. Найдите $\angle AC_1D$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 105.

Решение. Пусть D_1 — точка касания сферы и грани ABC и $\angle AC_1D = \varphi$. Заметим, что треугольники BA_1D и BC_1D равны по трем сторонам ($BA_1 = BC_1$ —

касательные к сфере из точки B, $DA_1 = DC_1$ — касательные к сфере из точки D, BD — общая сторона). Следовательно, $\angle BA_1D = \angle BC_1D = 125^\circ$ (рис. 20). Аналогично равны углы, под которыми видно любое ребро тетраэдра из точек

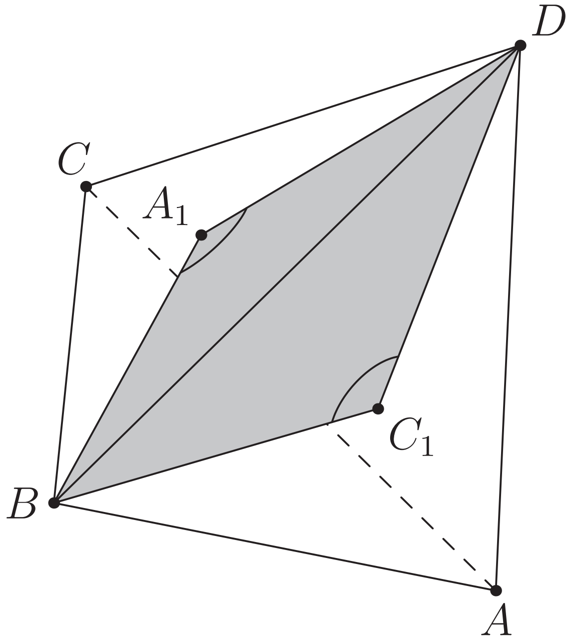

Рис. 20: к решению задачи 5/4

касания прилегающих к нему граней. В частности, $\angle CB_1D = \angle CA_1D = 130^\circ$ и $\angle AC_1D = \angle AB_1D = \varphi$. Кроме того, верны соотношения

$$\angle BA_1D + \angle DA_1C + \angle CA_1B = 360^\circ\,,$$
$$\angle BC_1D + \angle DC_1A + \angle AC_1B = 360^\circ\,,$$
$$\angle CB_1D + \angle DB_1A + \angle AB_1C = 360^\circ\,,$$

из которых заключаем, что

$$\angle CD_1B = \angle CA_1B = 360^\circ - 125^\circ - 130^\circ = 105^\circ\,,$$
$$\angle BD_1A = \angle BC_1A = 360^\circ - 125^\circ - \varphi = 235^\circ - \varphi\,,$$
$$\angle AD_1B = \angle AC_1B = 360^\circ - 130^\circ - \varphi = 230^\circ - \varphi\,.$$

Осталось сложить три полученных равенства и получить уравнение на φ:

$$360^\circ = 105^\circ + 235^\circ - \varphi + 230^\circ - \varphi\,,$$

из которого следует ответ. □

Задача 6/1. По кругу записаны 150 неотрицательных целых чисел, сумма которых равна n. Назовем число *удачным*, если оба его соседа являются натуральными. Раз в минуту выбирается удачное число, к нему прибавляется 2, а из его соседей вычитается по единице. Процесс заканчивается, если не осталось ни одного удачного числа. Найдите наибольшее значение n, при котором процесс заведомо закончится.

Ответ: 149.

Решение. Начнем с того, что если $n = 150$, то процесс необязательно закончится. Действительно, рассмотрим следующую расстановку (мы выписываем числа в строку для удобства, но следует иметь в виду, что первое и последнее число в строке являются соседними на окружности):

$$2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1 \quad 1\,.$$

Если мы выберем 0 в качестве удачного числа, то получим следующую расстановку

$$1 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1 \quad 1\,.$$

Нетрудно видеть, что она получается из предыдущей сдвигом на одну позицию по часовой стрелке. Проведя такую операцию 150 раз, мы придем в исходную позицию и сможем продолжать процесс бесконечно. При $n > 150$ легко строится аналогичный пример.

Докажем теперь, что если $n \leqslant 149$, то процесс обязательно застопорится. Для этого обратим внимание на нули (хотя бы один ноль обязательно есть, поскольку $n < 150$). Нули разбивают окружность на несколько дуг. Одна из них должна быть заполнена единицами, иначе сумма чисел на каждой дуге хотя бы на 1 больше количества чисел в ней, и тогда общая сумма будет не меньше 150. Выберем наименьшую из дуг, заполненных единицами (возможно, это дуга длины ноль, то есть просто два рядом стоящих нуля). Заметим, что длина такой наименьшей дуги не увеличивается при проведении операций, а если проводится операция, затрагивающая эту дугу, то длина строго уменьшается. Действительно, при проведении операции с единицей внутри, дуга разрывается на меньшие части — одну двойку и две дуги, заполненные единицами. При проведении операции с нулем на конце, дуга, очевидно, укорачивается на одну единицу.

Итак, длина наименьшей дуги не увеличивается, и, рано или поздно, она либо сожмется в пару соседних нулей, операции с которыми станут невозможны, либо операций, затрагивающих эту дугу, начиная с некоторого момента проводится не будет.

Если процесс продолжается бесконечно долго, то комбинация чисел по кругу рано или поздно повторится. Пусть повторилась позиция

$$a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_{150}\,,$$

при этом между повторениями число на первой позиции выбирали в качестве удачного x_1 раз, число на второй позиции — x_2 раз, ..., число на 150-й позиции — x_{150} раз. Тогда, поскольку все числа после всех операций не изменились, имеют место соотношения

$$
\begin{aligned}
&2x_2 - x_1 - x_3 = 0\\
&2x_3 - x_2 - x_4 = 0\\
&\ldots\\
&2x_{149} - x_{148} - x_{150} = 0\\
&2x_{150} - x_{149} - x_1 = 0\\
&2x_1 - x_{150} - x_2 = 0\,.
\end{aligned}
$$

Из них следует, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_{150}$ (достаточно рассмотреть максимальное из x_j и понять, что соседние с ним совпадают).

Подведем итог. Зацикливание возможно, только если на каждую позицию приходится ненулевое количество выборов удачного числа. Однако, как мы доказали выше в случае, когда сумма чисел равна 149, появится зона чисел, с которой операции более не проводятся. Это и означает, что процесс будет конечным. $\square$

Задача 6/2. По кругу записаны 250 неотрицательных целых чисел, сумма которых равна n. Назовем число *удачным,* если оба его соседа являются натуральными. Раз в минуту выбирается удачное число, к нему прибавляется 2, а из его соседей вычитается по единице. Процесс заканчивается, если не осталось ни одного удачного числа. Найдите наибольшее значение n, при котором процесс заведомо закончится.

Ответ: 249.

Решение. Начнем с того, что если $n = 250$, то процесс необязательно закончится. Действительно, рассмотрим следующую расстановку (мы выписываем числа в строку для удобства, но следует иметь в виду, что первое и последнее число в строке являются соседними на окружности):

$$2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1 \quad 1\,.$$

Если мы выберем 0 в качестве удачного числа, то получим следующую расстановку

$$1 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1 \quad 1\,.$$

Нетрудно видеть, что она получается из предыдущей сдвигом на одну позицию по часовой стрелке. Проведя такую операцию 250 раз, мы придем в исходную позицию и сможем продолжать процесс бесконечно. При $n > 250$ легко строится аналогичный пример.

Докажем теперь, что если $n \leqslant 249$, то процесс обязательно застопорится. Для этого обратим внимание на нули (хотя бы один ноль обязательно есть, поскольку $n < 250$). Нули разбивают окружность на несколько дуг. Одна из них должна быть заполнена единицами, иначе сумма чисел на каждой дуге хотя бы на 1 больше количества чисел в ней, и тогда общая сумма будет не меньше 250. Выберем наименьшую из дуг, заполненных единицами (возможно, это дуга длины ноль, то есть просто два рядом стоящих нуля). Заметим, что длина такой наименьшей дуги не увеличивается при проведении операций, а если проводится операция, затрагивающая эту дугу, то длина строго уменьшается. Действительно, при проведении операции с единицей внутри, дуга разрывается на меньшие части — одну двойку и две дуги, заполненные единицами. При проведении операции с нулем на конце, дуга, очевидно, укорачивается на одну единицу.

Итак, длина наименьшей дуги не увеличивается, и, рано или поздно, она либо сожмется в пару соседних нулей, операции с которыми станут невозможны, либо операций, затрагивающих эту дугу, начиная с некоторого момента проводится не будет.

Если процесс продолжается бесконечно долго, то комбинация чисел по кругу рано или поздно повторится. Пусть повторилась позиция

$$a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{250}\,,$$

при этом между повторениями число на первой позиции выбирали в качестве удачного x_1 раз, число на второй позиции — x_2 раз, ..., число на 250-й позиции — x_{250} раз. Тогда, поскольку все числа после всех операций не изменились, имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
&2x_2 - x_1 - x_3 = 0\\
&2x_3 - x_2 - x_4 = 0\\
&\dots\\
&2x_{249} - x_{248} - x_{250} = 0\\
&2x_{250} - x_{249} - x_1 = 0\\
&2x_1 - x_{250} - x_2 = 0\,.
\end{aligned}$$

Из них следует, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_{250}$ (достаточно рассмотреть максимальное из x_j и понять, что соседние с ним совпадают).

Подведем итог. Зацикливание возможно, только если на каждую позицию приходится ненулевое количество выборов удачного числа. Однако, как мы доказали выше в случае, когда сумма чисел равна 249, появится зона чисел, с которой операции более не проводятся. Это и означает, что процесс будет конечным. $\square$

Задача 6/3. По кругу записаны 350 неотрицательных целых чисел, сумма которых равна n. Назовем число *удачным,* если оба его соседа являются натуральными. Раз в минуту выбирается удачное число, к нему прибавляется 2, а из его соседей вычитается по единице. Процесс заканчивается, если не осталось ни одного удачного числа. Найдите наибольшее значение n, при котором процесс заведомо закончится.

Ответ: 349.

Решение. Начнем с того, что если $n = 350$, то процесс необязательно закончится. Действительно, рассмотрим следующую расстановку (мы выписываем числа в строку для удобства, но следует иметь в виду, что первое и последнее число в строке являются соседними на окружности):

$$2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1 \quad 1\,.$$

Если мы выберем 0 в качестве удачного числа, то получим следующую расстановку

$$1 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1 \quad 1\,.$$

Нетрудно видеть, что она получается из предыдущей сдвигом на одну позицию по часовой стрелке. Проведя такую операцию 350 раз, мы придем в исходную позицию и сможем продолжать процесс бесконечно. При $n > 350$ легко строится аналогичный пример.

Докажем теперь, что если $n \leqslant 349$, то процесс обязательно застопорится. Для этого обратим внимание на нули (хотя бы один ноль обязательно есть, поскольку $n < 350$). Нули разбивают окружность на несколько дуг. Одна из них должна быть заполнена единицами, иначе сумма чисел на каждой дуге хотя бы на 1 больше количества чисел в ней, и тогда общая сумма будет не меньше 350. Выберем наименьшую из дуг, заполненных единицами (возможно, это дуга длины ноль, то есть просто два рядом стоящих нуля). Заметим, что длина такой наименьшей дуги не увеличивается при проведении операций, а если проводится операция, затрагивающая эту дугу, то длина строго уменьшается. Действительно, при проведении операции с единицей внутри, дуга разрывается на меньшие части — одну двойку и две дуги, заполненные единицами. При проведении операции с нулем на конце, дуга, очевидно, укорачивается на одну единицу.

Итак, длина наименьшей дуги не увеличивается, и, рано или поздно, она либо сожмется в пару соседних нулей, операции с которыми станут невозможны, либо операций, затрагивающих эту дугу, начиная с некоторого момента проводится не будет.

Если процесс продолжается бесконечно долго, то комбинация чисел по кругу рано или поздно повторится. Пусть повторилась позиция

$$a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_{350}\,,$$

при этом между повторениями число на первой позиции выбирали в качестве удачного x_1 раз, число на второй позиции — x_2 раз, …, число на 350-й позиции — x_{350} раз. Тогда, поскольку все числа после всех операций не изменились, имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
&2x_2 - x_1 - x_3 = 0\\
&2x_3 - x_2 - x_4 = 0\\
&\ldots\\
&2x_{349} - x_{348} - x_{350} = 0\\
&2x_{350} - x_{349} - x_1 = 0\\
&2x_1 - x_{350} - x_2 = 0\,.
\end{aligned}$$

Из них следует, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_{350}$ (достаточно рассмотреть максимальное из x_j и понять, что соседние с ним совпадают).

Подведем итог. Зацикливание возможно, только если на каждую позицию приходится ненулевое количество выборов удачного числа. Однако, как мы доказали выше в случае, когда сумма чисел равна 349, появится зона чисел, с которой операции более не проводятся. Это и означает, что процесс будет конечным. $\square$

Задача 6/4. По кругу записаны 450 неотрицательных целых чисел, сумма которых равна n. Назовем число *удачным,* если оба его соседа являются натуральными. Раз в минуту выбирается удачное число, к нему прибавляется 2, а из его соседей вычитается по единице. Процесс заканчивается, если не осталось ни одного удачного числа. Найдите наибольшее значение n, при котором процесс заведомо закончится.

Ответ: 449.

Решение. Начнем с того, что если $n = 450$, то процесс необязательно закончится. Действительно, рассмотрим следующую расстановку (мы выписываем числа в строку для удобства, но следует иметь в виду, что первое и последнее число в строке являются соседними на окружности):

$$2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1 \quad 1\,.$$

Если мы выберем 0 в качестве удачного числа, то получим следующую расстановку

$$1 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1 \quad 1\,.$$

Нетрудно видеть, что она получается из предыдущей сдвигом на одну позицию по часовой стрелке. Проведя такую операцию 450 раз, мы придем в исходную позицию и сможем продолжать процесс бесконечно. При $n > 450$ легко строится аналогичный пример.

Докажем теперь, что если $n \leqslant 449$, то процесс обязательно застопорится. Для этого обратим внимание на нули (хотя бы один ноль обязательно есть, поскольку $n < 450$). Нули разбивают окружность на несколько дуг. Одна из них должна быть заполнена единицами, иначе сумма чисел на каждой дуге хотя бы на 1 больше количества чисел в ней, и тогда общая сумма будет не меньше 450. Выберем наименьшую из дуг, заполненных единицами (возможно, это дуга длины ноль, то есть просто два рядом стоящих нуля). Заметим, что длина такой наименьшей дуги не увеличивается при проведении операций, а если проводится операция, затрагивающая эту дугу, то длина строго уменьшается. Действительно, при проведении операции с единицей внутри, дуга разрывается на меньшие части — одну двойку и две дуги, заполненные единицами. При проведении операции с нулем на конце, дуга, очевидно, укорачивается на одну единицу.

Итак, длина наименьшей дуги не увеличивается, и, рано или поздно, она либо сожмется в пару соседних нулей, операции с которыми станут невозможны, либо операций, затрагивающих эту дугу, начиная с некоторого момента проводится не будет.

Если процесс продолжается бесконечно долго, то комбинация чисел по кругу рано или поздно повторится. Пусть повторилась позиция

$$a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_{450}\,,$$

при этом между повторениями число на первой позиции выбирали в качестве удачного x_1 раз, число на второй позиции — x_2 раз, $\ldots$, число на 450-й позиции — x_{450} раз. Тогда, поскольку все числа после всех операций не изменились, имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
&2x_2 - x_1 - x_3 = 0\\
&2x_3 - x_2 - x_4 = 0\\
&\ldots\\
&2x_{449} - x_{448} - x_{450} = 0\\
&2x_{450} - x_{449} - x_1 = 0\\
&2x_1 - x_{450} - x_2 = 0\,.
\end{aligned}$$

Из них следует, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_{450}$ (достаточно рассмотреть максимальное из x_j и понять, что соседние с ним совпадают).

Подведем итог. Зацикливание возможно, только если на каждую позицию приходится ненулевое количество выборов удачного числа. Однако, как мы доказали выше в случае, когда сумма чисел равна 449, появится зона чисел, с которой операции более не проводятся. Это и означает, что процесс будет конечным. $\square$