Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2019
Заключительный этап. 11 класс.

Задача 1. Два шарика, связанных легкой нитью, запускают с поверхности Земли с одинаковыми по модулю скоростями v_0 под разными углами: один шарик под углом $30°$ к горизонту, другой — $60°$.

1) Найдите максимальное расстояние между шариками.

2) Какие значения может принимать угол между нитью и горизонтом?

Нить считать всегда натянутой, силами упругости пренебречь.

Комментарий. В условии задачи не хватает уточнения, что шарики выпущены из одной точки, летят в одной плоскости в одну сторону. Шарик, который упадет первым, остаётся на поверхности Земли. Данное уточнение распространялось дополнительно, однако могут встречатся решения в иных предположениях. Такие решения будут оцениваться иначе, но исходя из 10 баллов за полностью правильное решение в предположениях участника.

Возможное решение

Поскольку в условии сказано, что силами упругости нити необходимо пренебречь, задача превращается в кинематическую, а нить представляет собой просто отрезок, соединяющий два шарика.

Запишем уравнения движения для шариков. Пусть первый шарик летит под углом $\alpha = 30°$, соответственно второй — под углом $\beta = 60°$.

$$\begin{cases} x_1(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ x_2(t) = v_0 \cos\beta \cdot t \\ y_1(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \\ y_2(t) = v_0 \sin\beta \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Расстояние между шариками определяется выражением:

$$L^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Подставляя выражения для координат шариков получим:

$$L^2 = (v_0 t)^2(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (v_0 t)^2(\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 2(v_0 t)^2(\sin\alpha - \cos\alpha)^2,$$

т.к. $\cos\alpha = \sin\beta, \sin\alpha = \cos\beta$.

Данное выражение монотонно возрастает по t, следовательно максимум может быть достугнут только на границе области определения данной функции. Это произойдет в момент, когда шарик, выпущенный по более пологой траектории (под углом $30°$ к горизонту), упадет на Землю. Обозанчим этот моент времени за τ

$$\tau = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

Подставляя значение в выражение для L^2 получим:

$$L_{max} = \frac{2\sqrt{2}v_0^2 \sin\alpha}{g}|\sin\alpha - \cos\alpha| = \frac{v_0^2}{g}(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}})$$

Для того, чтобы найти возможные значения выражения для угла между нитью и гризонтом (обозначим его за φ), посмотрим на выражение для L^2. Видно, что в процессе полета обоих шариков вериткальная и горизонтальная составляющая равны друг другу.

Это означает, что искомый угол равен 45°. Когда первый шарик приземлится, второй продолжит лететь в ту же точку, куда упал первый (дальность полета, очевидно, одинаковая у обоих шариков). Соответственно нить будет представлять собой секущую параболы, по которой движется второй шарик, а угол будет возрастать. Когда второй шарик упадет, хорда превратится в касательную, следовательно угол между нитью и горизонтом будет равен углу, под которым второй шарик приземлится. Из симметрии параболы этот угол равен углу, под которым шарик запустили, т.е. 60°.

$$\varphi \in [45^\circ; 60^\circ].$$

Критерии оценивания

1). Задача сведена к кинематической, записаны уравнения движения (+3 балла).

2). Записано выражение для расстояния между шариками (+1 балл).

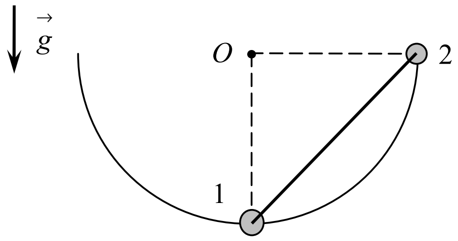
3). Определено условия максимума для расстояния между шариками (+1 балл).

4). Получен ответ для максимальго расстояния между шариками (+1 балл).

5). Получено выражение для угла между нитью и горизонтом во время полета обоих шариков, получена оценка снизу для этого угла (+2 балла).

6). Получена оценка сверху для угла между нитью и горизонтом (+2 балла).

Задача 2. Из тонкой проволоки согнута полуокружность с центром в точке O и радиусом $R = 0{,}5$ м. Полуокружность неподвижно закреплена в вертикальной плоскости. По проволоке могут скользить без трения маленькие бусинки 1 и 2, соединённые жёстким невесомым стержнем. Отношение масс бусинок $k = m_1/m_2 = 2$. При движении стержень может свободно поворачиваться вокруг точек крепления к бусинкам. В начальном положении бусинки 1 и 2 находятся на концах вертикального и горизонтального радиусов. Стержень с бусинками отпускают без толчка. Найдите максимальную скорость V бусинки 1 при дальнейшем движении. Бусинки считайте материальными точками. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразите в м/с и округлите до сотых.



Возможное решение

Рассмотрим промежуточное положение системы, когда радиусы, проведённые из центра полуокружности к бусинкам, повернулись на угол φ относительно своих первоначальных положений. Скорости бусинок обозначим через V_1 и V_2. Отсчитывая высоты от центра полуокружности, запишем закон сохранения энергии:

$$-m_1 gR = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} - m_1 gR\cos\varphi - m_2 gR\sin\varphi$$

$$m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 = 2gR\,(\,m_1(\,\cos\varphi - 1\,) + m_2\sin\varphi\,)$$

$$k\,V_1^2 + V_2^2 = 2gR\,(\,k\,(\,\cos\varphi - 1\,) + \sin\varphi\,)$$

Здесь R — радиус полуокружности, $k = m_1/m_2$. Так как длина стержня не меняется при движении, то проекции скоростей на направление стержня совпадают. Из простых геометрических соображений следует, что при любом значении угла φ скорости бусинок образуют со стержнем углы в 45°. Получаем:

$$V_1\cos 45^\circ = V_2\cos 45^\circ \quad\longrightarrow\quad V_1 = V_2$$

Исключая скорость V_2, находим V_1 как функцию угла φ:

$$(\,k+1\,)\,V_1^2 = 2gR\,(\,k\,(\,\cos\varphi - 1\,) + \sin\varphi\,) \quad\longrightarrow\quad V_1^2 = \frac{2gR}{k+1}\,f\,(\varphi)$$

Функция $f\,(\varphi)$ равна:

$$f\,(\varphi) = k\,(\,\cos\varphi - 1\,) + \sin\varphi = k\,\cos\varphi + \sin\varphi - k$$

Преобразуем эту функцию с помощью метода вспомогательного аргумента:

$$f\,(\varphi) = \sqrt{k^2+1}\,\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\,\cos\varphi + \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\,\sin\varphi\right) - k = \sqrt{k^2+1}\,\cos\,(\,\varphi - \varphi_0\,) - k$$

Вспомогательный аргумент φ_0 определяется двумя равенствами:

$$\sin\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\ ; \quad \cos\varphi_0 = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$$

Угол φ_0 лежит в первой четверти. Поэтому его можно выразить через арктангенс:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{1}{k} \quad \longrightarrow \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{1}{k}$$

Очевидно, что функция $f(\varphi)$ максимальна при $\varphi = \varphi_0$:

$$f(\varphi_0) = \sqrt{k^2+1} - k$$

Тогда максимальная скорость первой бусинки равна:

$$V = \sqrt{\frac{2gR}{k+1}\, f(\varphi_0)} = \sqrt{\frac{2\,gR\,(\sqrt{k^2+1} - k)}{k+1}} = 0{,}89 \text{ м/с}$$

Ответ также можно представить в виде, удобном для приближённого вычисления:

$$V = \sqrt{\frac{2\,gR}{(k+1)(\sqrt{k^2+1} + k)}}$$

Следует отметить, что угол φ_0 определяет положение равновесия системы. Действительно, приравнивая моменты сил тяжести относительно центра полуокружности, получаем:

$$m_1 gR\sin\varphi = m_2 gR\cos\varphi \quad \longrightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{k} \quad \longrightarrow \quad \varphi = \varphi_0$$

Поскольку бусинки совершают колебания около положения равновесия, можно сразу считать очевидным, что максимальные скорости достигаются в этом положении.

Ответ:

$$V = \sqrt{\frac{2\,gR\,(\sqrt{k^2+1} - k)}{k+1}} = \sqrt{\frac{2\,gR}{(k+1)(\sqrt{k^2+1} + k)}} = 0{,}89 \text{ м/с}$$

Критерии оценивания

1). Правильно получена конечная формула, нет логических ошибок, получен правильный численный ответ (10 баллов).

2). Содержится небольшая логическая ошибка, неверный/отсутствует численный ответ (9 баллов).

3). Все законы записаны правильно, найден верный угол отклонения шариков, но допущена ошибка в промежуточных вычислениях (7 баллов).

4). Записан закон сохранения энергии, доказано равенство скоростей, есть дальнейшие продвижения в решении, но ответ неправильный (5 баллов).

5). Верно записан закон сохранения энергии (4 балла).

6). Верно определен центр масс и/или доказано равенство скоростей (3 балла).

7). Представлено доказательство равенства скоростей (2 балла).

8). Записан второй закон Ньютона (1 балл).

Задача 3. Длинный горизонтальный цилиндр с одной стороны наглухо закрыт, а с другой открыт в окружающую среду. В цилиндре может двигаться без трения тяжёлый поршень. Между поршнем и закрытым торцом цилиндра находится идеальный одноатомный газ, занимающий объём $V_0 = 1{,}5$ л при внешнем давлении P_0. Внешнее давление мгновенно уменьшают до значения $P_1 = (1-\alpha)P_0$, где $\alpha = 0.2$, и поддерживают его постоянным до полной остановки поршня и перехода газа в новое состояние равновесия с давлением P_1. Далее внешнее давление скачком увеличивают до начального значения P_0 и поддерживают его постоянным до перехода газа в конечное равновесное состояние, в котором газ занимает некоторый объём V_K при давлении P_0. Считая, что стенки цилиндра и поршень не проводят тепло, найдите разность объёмов $\Delta V = V_K - V_0$. Числовой ответ выразите в кубических сантиметрах.

Возможное решение

Рассмотрим переход газа из начального состояния 0 в промежуточное равновесное состояние 1. Параметры газа, относящиеся к этим состояниям, будем отмечать индексами 0 и 1. Запишем первое начало термодинамики:

$$0 = \frac{3}{2}\nu R T_1 - \frac{3}{2}\nu R T_0 + A_{01}\,,$$

R — универсальная газовая постоянная, ν – число молей газа, A_{01} — работа силы давления газа на поршень. Далее рассмотрим баланс энергии для поршня. Так как его механическая энергия не изменилась, то

$$0 = A_{01} + A'_{01}\,.$$

Здесь A'_{01} — работа силы внешнего давления:

$$A'_{01} = -P_1(V_1 - V_0)\,.$$

Эта работа отрицательна, поскольку сила внешнего давления действует против направления движения поршня при расширении газа. Используя также уравнение состояния газа

$$P_0V_0 = \nu R T_0\,, \quad P_1V_1 = \nu R T_1\,,$$

находим объём V_1:

$$A_{01} = -A'_{01} = P_1(V_1 - V_0)\,,$$

$$0 = \frac{3}{2}P_1V_1 - \frac{3}{2}P_0V_0 + P_1(V_1 - V_0) \quad \longrightarrow \quad 0 = 3P_1V_1 - 3P_0V_0 + 2P_1V_1 - 2P_1V_0\,,$$

$$5P_1V_1 = 3P_0V_0 + 2P_1V_0 \quad \longrightarrow \quad V_1 = \frac{V_0(3P_0 + 2P_1)}{5P_1} = \frac{V_0(5-2\alpha)}{5(1-\alpha)}\,.$$

Рассмотрим теперь переход газа из состояния 1 в конечное состояние. Параметры газа, относящиеся к конечному состоянию, будем отмечать индексом K. Запишем первое начало термодинамики:

$$0 = \frac{3}{2}\nu R T_K - \frac{3}{2}\nu R T_1 + A_{1K}\,,$$

A_{1K} — работа силы давления газа на поршень. Так как механическая энергия поршня не изменилась, то

$$0 = A_{1K} + A'_{1K}\,,$$

A'_{1K} — работа силы внешнего давления:

$$A'_{1K} = P_0(V_1 - V_K)\,.$$

В данном случае работа положительна, поскольку сила внешнего давления действует по направлению движения поршня при сжатии газа. Используя также соотношение

$$P_0 V_K = \nu R T_K$$

и полученное выше значение V_1, находим объём V_K:

$$A_{1K} = -A'_{1K} = -P_0\,(\,V_1 - V_K\,)\,,$$

$$0 = \frac{3}{2}\,P_0 V_K - \frac{3}{2}\,P_1 V_1 - P_0\,(\,V_1 - V_K\,) \quad \longrightarrow \quad 0 = 3P_0 V_K - 3P_1 V_1 - 2P_0 V_1 + 2P_0 V_K\,,$$

$$5P_0 V_K = 3P_1 V_1 + 2P_0 V_1 \quad \longrightarrow \quad V_K = \frac{V_1\,(\,3P_1 + 2P_0\,)}{5P_0} = \frac{V_0\,(\,5-2\alpha\,)\,(\,5-3\alpha\,)}{25\,(\,1-\alpha\,)}\,.$$

Разность конечного и начального объёмов равна:

$$\Delta V = V_K - V_0 = V_0\,\left[\,\frac{(\,5-2\alpha\,)\,(\,5-3\alpha\,)}{25\,(\,1-\alpha\,)} - 1\,\right] = \frac{6\,\alpha^2\,V_0}{25\,(\,1-\alpha\,)} = 18\ \text{см}^3$$

Ответ:

$$\Delta V = \frac{6\,\alpha^2\,V_0}{25\,(\,1-\alpha\,)} = 18\ \text{см}^3$$

Критерии оценивания

1. Записано первое начало термодинами для перехода из начального состояния в промежуточное (+2 балла).
2. Правильно вычислена работа газа для этого перехода с пояснениями к уравнению баланса энергии для поршня (+2 балла).
3. Найден объём газа в промежуточном состоянии (+1 балл).
4. Записано первое начало термодинами для перехода из промежуточного состояния в конечное (+2 балла).
5. Правильно вычислена работа газа для этого перехода с пояснениями к уравнению баланса энергии для поршня (+2 балла).
6. Получен правильный ответ для разности объёмов (+1 балл).

Задача 4. Электродвигатель постоянного тока подключён к батарее с ЭДС $\varepsilon = 10$ В. На вал двигателя намотана длинная лёгкая нить с грузом массы $m = 0{,}1$ кг. При работе двигателя груз поднимается с постоянной скоростью $v = 8$ см/с. Найдите силу тока I, текущего по цепи в этом случае. Известно, что при полном затормаживании вала двигателя по цепи течёт ток $I_0 = 50$ мА. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2; потери энергии на трение не учитывайте. Числовой ответ выразите в миллиамперах.

Возможное решение

Рассмотрим баланс энергии в цепи за некоторый промежуток времени Δt:

$$\varepsilon I \Delta t = I^2 R \Delta t + A\,.$$

В левой части этого уравнения записана работа батареи. Первое слагаемое в правой части — количество выделившейся теплоты, R — полное сопротивление цепи; A — работа двигателя. Так как груз поднимается с постоянной скоростью, то работа A определяется приращением потенциальной энергии груза. Учитывая, что за время Δt груз поднимается на высоту $h = v\Delta t$, получаем:

$$A = mgh = mgv\Delta t\,,$$

$$\varepsilon I \Delta t = I^2 R \Delta t + mgv\Delta t \quad \longrightarrow \quad \varepsilon I = I^2 R + mgv\,.$$

Уравнение для случая, когда вал двигателя полностью заторможен, получается отсюда при $v = 0$:

$$\varepsilon I_0 = I_0^2 R \quad \longrightarrow \quad R = \frac{\varepsilon}{I_0}\,.$$

Для тока I получаем квадратное уравнение:

$$I^2 \frac{\varepsilon}{I_0} - \varepsilon I + mgv = 0 \quad \longrightarrow \quad I^2 - I_0 I + \frac{mgvI_0}{\varepsilon} = 0\,.$$

Корни этого уравнения равны:

$$I = \frac{I_0}{2} \pm \sqrt{\frac{I_0^2}{4} - \frac{mgvI_0}{\varepsilon}} = \frac{I_0}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgv}{\varepsilon I_0}}\right)$$

Поскольку при $v = 0$ ток I должен равняться I_0, то перед квадратным корнем следует взять знак плюс. Окончательно получаем:

$$I = \frac{I_0}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4mgv}{\varepsilon I_0}}\right) = 40 \text{ мА}$$

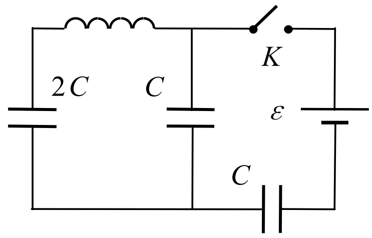
Ответ:

$$I = \frac{I_0}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4mgv}{\varepsilon I_0}}\right) = 40 \text{ мА}$$

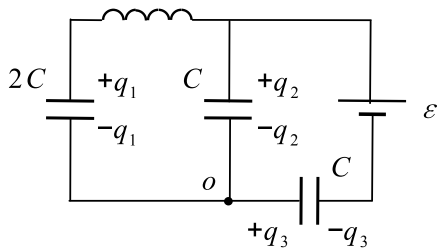
Критерии оценивания

1. Записано уравнение баланса энергии (+3 балла).
2. Записана связь механической работы и скорости груза (+2 балла).
3. Найдено общее сопротивление цепи (+1 балл).
4. Получено уравнение для определения тока (+1 балл).
5. Правильно выбран корень уравнения (+2 балла).
6. Получен правильный ответ (+1 балл).

Задача 5. Цепь состоит из ключа K, катушки, двух конденсаторов ёмкостью C, одного конденсатора ёмкостью $2C$ и батареи с ЭДС $\varepsilon = 12$ В. Сначала ключ разомкнут, конденсаторы не заряжены. После замыкания ключа в цепи возникают колебания токов и напряжений. Если пренебречь излучением и сопротивлением всех элементов цепи, то колебания можно считать гармоническими. В этом приближении найдите амплитуду V_A колебаний напряжения на конденсаторе $2C$. Числовой ответ выразите в вольтах и округлите до десятых.



Возможное решение



Обозначим через V_{max} и V_{min} максимальное и минимальное значения напряжения на конденсаторе $2C$. Амплитуда колебаний напряжения равна полуразности этих величин:

$$V_A = \frac{V_{max} - V_{min}}{2}\,.$$

Обозначим заряд на конденсаторе $2C$ через q_1, а заряды на двух оставшихся конденсаторах через q_2 и q_3. Напряжения на конденсаторах равны:

$$V_1 = \frac{q_1}{2C}\,, \quad V_2 = \frac{q_2}{C}\,, \quad V_3 = \frac{q_3}{C}\,.$$

Запишем два соотношения, которые справедливы в любой момент времени после замыкания ключа. Для правого контура, включающего в себя батарею и два конденсатора ёмкостью C, имеем:

$$\varepsilon = V_2 + V_3\,.$$

Три обкладки конденсаторов, соединённые в нижнем узле o, образуют изолированный проводник, заряд которого равен нулю:

$$-q_1 - q_2 + q_3 = 0 \quad \longrightarrow \quad -2C\,V_1 - C\,V_2 + C\,V_3 = 0 \quad \longrightarrow \quad 2V_1 + V_2 = V_3\,.$$

Выразим из полученных уравнений V_2 и V_3 через V_1:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V_2 + V_3 & = & \varepsilon \\ V_2 - V_3 & = & -2V_1 \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad V_2 = \frac{\varepsilon}{2} - V_1\,, \quad V_3 = \frac{\varepsilon}{2} + V_1\,.$$

Поскольку в правом контуре нет индуктивности, то сразу после замыкания ключа на конденсаторах ёмкости C устанавливаются отличные от нуля заряды и напряжения. При этом, из-за действия ЭДС самоиндукции в катушке, ток в левом контуре можно считать всё ещё равным нулю. Поэтому заряд и напряжение на конденсаторе $2C$ не успевают измениться, то есть остаются равными нулю. Полагая $V_1 = 0$, из полученных выше соотношений находим напряжения и заряды на конденсаторах ёмкости C сразу после замыкания ключа:

$$V_{20} = V_{30} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad q_{20} = q_{30} = \frac{C\varepsilon}{2}$$

Рассматривая эти значения в качестве начальных, запишем уранение баланса энергии в цепи:

$$A = \Delta W + \frac{L I^2}{2}.$$

Здесь A — работа батареи, ΔW — приращение энергии конденсаторов, L — индуктивность катушки, I — сила тока в катушке. Учитывая, что через батарею в направлении действия её ЭДС прошёл заряд $(q_3 - q_{30})$, для работы A получаем:

$$A = (q_3 - q_{30})\,\varepsilon = C\,(V_3 - V_{30})\,\varepsilon = C\,V_3\,\varepsilon - \frac{C\,\varepsilon^2}{2}.$$

Для приращения энергии имеем:

$$\Delta W = W - W_0,$$

W — энергия конденсаторов в произвольный момент времени:

$$W = \frac{2\,C\,V_1^2}{2} + \frac{C\,V_2^2}{2} + \frac{C\,V_3^2}{2},$$

W_0 — энергия сразу после замыкания ключа:

$$W_0 = \frac{C\,V_{20}^2}{2} + \frac{C\,V_{30}^2}{2} = \frac{C\,\varepsilon^2}{4}.$$

В те моменты времени, когда заряд на конденсаторе $2\,C$ максимален или минимален, сила тока в катушке обращается в нуль. Для этих моментов имеем:

$$A = \Delta W \quad\longrightarrow\quad C\,V_3\,\varepsilon - \frac{C\,\varepsilon^2}{2} = C\,V_1^2 + \frac{C\,V_2^2}{2} + \frac{C\,V_3^2}{2} - \frac{C\,\varepsilon^2}{4},$$

$$V_3\,\varepsilon = V_1^2 + \frac{V_2^2 + V_3^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} \quad\longrightarrow\quad 4\,V_3\,\varepsilon = 4\,V_1^2 + 2\,V_2^2 + 2\,V_3^2 + \varepsilon^2.$$

Здесь V_1 — максимальное или минимальное значение напряжения на конденсаторе $2\,C$. Подставим в последнее уравнение значения V_2 и V_3, выраженные через V_1:

$$4\,\left(\frac{\varepsilon}{2} + V_1\right)\varepsilon = 4\,V_1^2 + 2\,\left(\frac{\varepsilon}{2} - V_1\right)^2 + 2\,\left(\frac{\varepsilon}{2} + V_1\right)^2 + \varepsilon^2,$$

$$2\,\varepsilon^2 + 4\,\varepsilon\,V_1 = 4\,V_1^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} - 2\,\varepsilon\,V_1 + 2\,V_1^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} + 2\,\varepsilon\,V_1 + 2\,V_1^2 + \varepsilon^2,$$

$$8\,V_1^2 - 4\,\varepsilon\,V_1 = 0.$$

Отсюда максимальное и минимальное значения напряжения на конденсаторе $2\,C$ равны:

$$V_{max} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad V_{min} = 0.$$

Для амплитуды колебаний напряжения получаем:

$$V_A = \frac{V_{max} - V_{min}}{2} = \frac{\varepsilon}{4} = 3 \text{ В}$$

Ответ:

$$V_A = \frac{\varepsilon}{4} = 3 \text{ В}$$

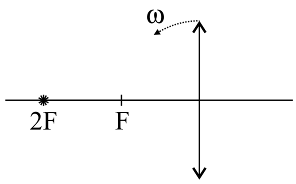
Критерии оценивания

1. Найдены заряды на конденсаторах C сразу после замыкания ключа (+2 балла).
2. Правильно записан закон сохранения энергии для цепи (+ 3 балла).
3. Решено уравнение относительно заряда или напряжения на конденсаторе $2C$ (+2 балла).
4. Найдена амплитуда (+3 балла).

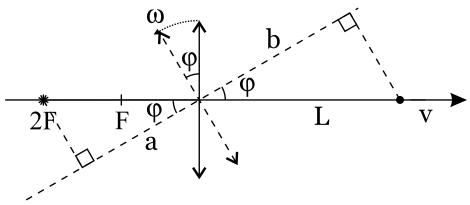
Критерии оценивания при решении через законы Кирхгофа

1. Правильно записан 2-й закон Кирхгофа для любых двух контуров (+2 балла).
2. Записан закон сохранения заряда для изолированной области (+2 балла).
3. Из составленного дифференциального уравнения найден вид решения (+1 балл).
4а. Найдена положение равновесия (+2 балла).
4б. Найдена амплитуда колебаний в контуре (+2 балла).
5. Получен правильный ответ (+1 балл).

Задача 6. На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F расположен источник света. Расстояние от источника света до линзы $2F$. Линзу начинают поворачивать в плоскости, содержащей главную оптическую ось с постоянной угловой скоростью ω. Найдите скорость изображения источника света в момент, когда расстояние между ним и главной оптической осью равно F.



Возможное решение



Рассмотрим момент, когда ось повернулась относительно первоначального пололжения на некоторый угол φ. Поскольку луч, проходящий через центр линзы, всегда соединяет источник света и его изображение, движение самого изображения будет направлено вдоль этого луча. Введем расстояние от центра линзы до изображения вдоль центрального луча и обозначим его за L. Из рисунка видно, что $L = b/\cos\varphi$, где b — расстояние от изображения до линзы (не до центра линзы!). Расстояние от источника до линзы также легко определить: $a = 2F\cos\varphi$. Подставляя выражения для a и b в формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F},$$

получаем

$$L = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{aF}{a-F} = \frac{2F^2}{2F\cos\varphi - F} = F\frac{2}{2\cos\varphi - 1}$$

. Искомая скорость получается простым дифференцированием по времени выражения для L:

$$v = \dot{L} = F \cdot 2 \cdot \frac{(-1)\cdot(-2\sin\varphi\cdot\dot{\varphi})}{(2\cos\varphi - 1)^2}$$

. Учитывая, что $\dot{\varphi} = \omega$, получаем:

$$v = F\omega\frac{4\sin\varphi}{(2\cos\varphi - 1)^2}$$

. Осталось найти угол при котором, выполняется условие, что расстояние между источником света и оптической осью равно F (условие можно было прочитать двояко; второй вариант, что расстояние между изображением и оптической осью равно F). В первом случае угол определяется немедленно:

$$\sin\varphi_0 = \frac{F}{2F} = \frac{1}{2} \to \varphi_0 = \pi/6,$$

а итоговое значение скорости приобретает вид:

$$v = F\omega\frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2} = F\omega\frac{1}{2-\sqrt{3}} \approx 3{,}73F\omega.$$

Во втором случае, условие на угол имеет вид

$$\sin\varphi_0 = F/L = \left\{L = F\frac{2}{2\cos\varphi - 1}\right\} = \cos\varphi_0 - \frac{1}{2}.$$

Возводя в квадрат полученное тригонометрическое уравнение, получим

$$\sin 2\varphi_0 = 3/4 \to \varphi_0 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}.$$

Критерии оценивания

1. Правильно записна формула тонкой линзы (+1 балл).
2. Верно найдено расстояние от центра линзы до изображения источника (+3 балла).
3. Верно найдено выражение для скорости изображения источника, но не найден угол φ_0 (+4 балла).
4. Верно найден угол φ_0 (+1 балл).
5. Получен правильный ответ (+1 балл).