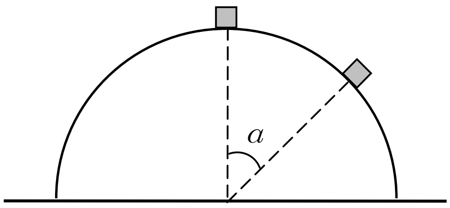
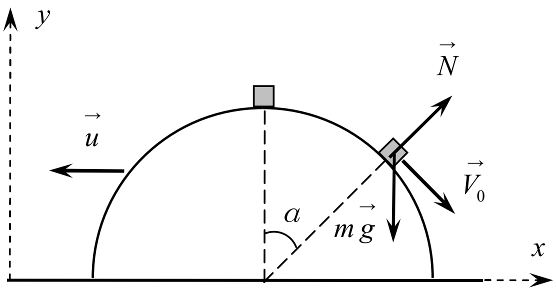
Задача 1. Маленький брусок начинает соскальзывать с вершины гладкой полусферы, стоящей на гладком горизонтальном столе, и в некоторой точке отрывается от неё. Центральный угол между радиусами полусферы, проведёнными к её вершине и к точке отрыва, равен $\alpha = \arccos(0,67)$. Найдите отношение x массы полусферы M к массе бруска m: $x = M/m$.



Возможное решение



Рассмотрим движение бруска и полусферы в инерциальной системе отсчёта, связанной со столом. Ось x направим вдоль стола, ось y вертикально вверх. Так как между полусферой и столом нет трения, то горизонтальная составляющая полного импульса сохраняется:

$$-Mu + mV_x = 0\,.$$

Здесь $\vec{u}$ и $\vec{V}$ — скорости полусферы и бруска относительно стола. По закону сложения скоростей имеем:

$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{V_0}\,.$$

$\vec{V_0}$ — скорость бруска относительно полусферы; вектор $\vec{V_0}$ направлен по касательной к окружности, по которой движется брусок. Получаем:

$$V_x = -u + V_0\cos\alpha\,,$$

$$-Mu - mu + mV_0\cos\alpha = 0 \quad \longrightarrow \quad u = \frac{mV_0\cos\alpha}{M+m}\,.$$

Запишем второй закон Ньютона для бруска:

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}\,,$$

$\vec{a}$ — ускорение бруска относительно стола, $\vec{N}$ — сила нормальной реакции, действующая на брусок со стороны полусферы. По закону сложения ускорений:

$$\vec{a} = \vec{w} + \vec{a_0}\,,$$

$\overrightarrow{w}$ — ускорение полусферы относительно стола, $\overrightarrow{a_0}$ — ускорение бруска относительно полусферы. Вектор $\overrightarrow{w}$ сонаправлен вектору скорости полусферы $\overrightarrow{u}$. Ускорение $\overrightarrow{w}$ опрелеляется горизонтальной составляющей силы давления бруска на полусферу. Так как эта сила равна $-\overrightarrow{N}$, то:

$$Mw = N \sin\alpha\,.$$

В момент отрыва имеем:

$$\overrightarrow{N} = 0\,, \quad \overrightarrow{w} = 0\,, \quad \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_0}\,,$$

$$m\overrightarrow{a_0} = m\overrightarrow{g} \quad \longrightarrow \quad \overrightarrow{a_0} = \overrightarrow{g}\,.$$

Составляющая ускорения $\overrightarrow{a_0}$, направленная вдоль радиуса полусферы, представляет собой центростремительное ускорение бруска. Получаем:

$$g\cos\alpha = \frac{V_0^2}{R} \quad \longrightarrow \quad V_0^2 = gR\cos\alpha\,,$$

R — радиус полусферы. Для того чтобы найти скорость V_0, запишем закон сохранения энергии:

$$mgR = mgR\cos\alpha + \frac{Mu^2}{2} + \frac{mV^2}{2}\,.$$

Горизонтальная составляющая скорости $\overrightarrow{V}$ была найдена выше. Для вертикальной составляющей имеем:

$$V_y = -V_0 \sin\alpha\,.$$

Квадрат скорости равен:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 = (-u + V_0\cos\alpha)^2 + V_0^2\sin^2\alpha = u^2 - 2\,uV_0\cos\alpha + V_0^2\,.$$

Из закона сохранения энергии получаем:

$$2mgR\,(1-\cos\alpha) = (M+m)\,u^2 - 2m\,uV_0\cos\alpha + mV_0^2\,.$$

Далее воспользуемся найденными ранее выражениями для u и V_0:

$$2mgR\,(1-\cos\alpha) = (M+m)\cdot\frac{m^2V_0^2\cos^2\alpha}{(M+m)^2} - 2mV_0\cos\alpha\cdot\frac{mV_0\cos\alpha}{M+m} + mV_0^2\,,$$

$$2gR\,(1-\cos\alpha) = \frac{V_0^2}{M+m}\,(m\cos^2\alpha - 2m\cos^2\alpha + M + m)\,,$$

$$2gR\,(1-\cos\alpha) = \frac{gR\cos\alpha}{M+m}(-m\cos^2\alpha + M + m)\,,$$

$$2 - 2\cos\alpha = -\frac{m\cos^3\alpha}{M+m} + \cos\alpha\,,$$

$$\frac{m\cos^3\alpha}{M+m} = 3\cos\alpha - 2 \quad \longrightarrow \quad \frac{M+m}{m} = \frac{\cos^3\alpha}{3\cos\alpha - 2}\,.$$

Отсюда находим отношение масс $x = M/m$:

$$x + 1 = \frac{\cos^3\alpha}{3\cos\alpha - 2} \quad \longrightarrow \quad x = \frac{\cos^3\alpha}{3\cos\alpha - 2} - 1 = 29$$

Ответ:

$$x = \frac{\cos^3\alpha}{3\cos\alpha - 2} - 1 = 29$$

Критерии оценивания

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).

Записан закон сохранения горизонтальной составляющей импульса (+1).

Записан второй закон Ньютона и закон сложения ускорений (+1).

Сформулировано условие отрыва и найдены ускорения бруска и полусферы в момент отрыва (+1).

Записан закон сохранения энергии (+1).

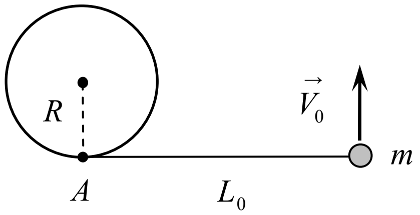
Получен правильный ответ (+1).

Задача 2. На гладкой горизонтальной поверхности неподвижно закреплён вертикальный столб радиуса $R = 20$ см. К точке A, лежащей на поверхности столба, прикреплён конец невесомой нерастяжимой нити длины $L_0 = 4$ м. К другому концу нити прикреплена маленькая шайба массы $m = 50$ г. В начальном положении шайба неподвижна, а нить направлена по касательной к окружности столба в точке A (см. вид сверху на рисунке). Шайбе сообщают скорость $V_0 = 2$ м/с, направленную перпендикулярно нити. В результате нить начинает наматываться на столб. Считая, что нить всё время остаётся горизонтальной, найдите следующие величины:

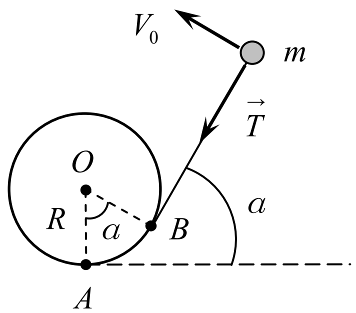
1. Число N оборотов нити вокруг столба к моменту, когда сила натяжения нити станет равна $T_0 = 0,1$ Н. Числовой ответ округлите до десятых.

2. Время τ, за которое нить сделает это число оборотов. Числовой ответ выразите в секундах.

Трение не учитывайте, шайбу считайте материальной точкой.



Возможное решение



Примем за начало отсчёта времени момент начала движения шайбы. Пусть в момент времени t нить касается столба в точке B и нить повернулась на угол α. Угол между радиусами OA и OB также равен α. Длина участка нити от точки B до шайбы равна:

$$L = L_0 - \alpha R.$$

Если не учитывать трение, то в горизонтальной плоскости на шайбу действует только сила натяжение нити $\vec{T}$. Работа этой силы равна нулю, поскольку направление её действия перпендикулярно скорости шайбы. Поэтому абсолютная величина скорости шайбы не меняется при движении. Так как мгновенная скорость точки B равна нулю, то можно считать, что в данный момент времени шайба вращается по окружности радиуса L с центром в точке B. Тогда сила натяжения нити сообщает шайбе центростремительное ускорение. По второму закону Ньютона имеем:

$$m \cdot \frac{V_0^2}{L} = T \quad \longrightarrow \quad \frac{mV_0^2}{L_0 - \alpha R} = T \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{R}\left(L_0 - \frac{mV_0^2}{T}\right).$$

Полагая $T = T_0$, находим соответствующий угол поворота нити:

$$\alpha_0 = \frac{1}{R}\left(L_0 - \frac{mV_0^2}{T_0}\right).$$

Число оборотов нити равно:

$$N = \frac{\alpha_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R}\left(L_0 - \frac{mV_0^2}{T_0}\right) = 1,6$$

Для того чтобы найти время τ поворота нити на угол α_0, разобьём промежуток $[0,\,\tau]$ на малые интервалы и перенумеруем их индексом k. Пусть за время от t_k до $t_k + \Delta\, t_k$ угол поворота нити увеличился от α_k до $\alpha_k + \Delta\,\alpha_k$. При этом шайба переместилась на малое расстояние $V_0 \Delta\, t_k$. Считая, что шайба двигалась по дуге окружности радиуса $L_k = L_0 - \alpha_k R$, то же расстояние можно записать в виде $L_k \Delta\,\alpha_k$:

$$V_0 \Delta\, t_k = L_k \Delta\,\alpha_k \quad \longrightarrow \quad V_0 \Delta\, t_k = (L_0 - \alpha_k R)\,\Delta\,\alpha_k\,.$$

Просуммируем все такие равенства:

$$\sum_k V_0 \Delta\, t_k = \sum_k (L_0 - \alpha_k R)\,\Delta\,\alpha_k\,,$$

$$V_0 \sum_k \Delta\, t_k = L_0 \sum_k \Delta\,\alpha_k - R\sum_k \alpha_k\,\Delta\,\alpha_k\,.$$

Входящие сюда суммы равны:

$$\sum_k \Delta\, t_k = \tau\,, \quad \sum_k \Delta\,\alpha_k = \alpha_0\,, \quad \sum_k \alpha_k\,\Delta\,\alpha_k = \frac{\alpha_0^2}{2}\,.$$

Последняя сумма вычисляется как площадь под графиком линейной функции $y(\alpha) = \alpha$ при изменении α от нуля до α_0. Окончательно получаем:

$$V_0\,\tau = L_0\,\alpha_0 - \frac{R\,\alpha_0^2}{2} = \frac{\alpha_0\,(\,2L_0 - R\,\alpha_0\,)}{2} = \frac{1}{2R}\left[L_0^2 - \left(\frac{mV_0^2}{T_0}\right)^2\right],$$

$$\tau = \frac{1}{2V_0 R}\left[L_0^2 - \left(\frac{mV_0^2}{T_0}\right)^2\right] = 15 \text{ с}$$

Ответ:

1.

$$N = \frac{1}{2\pi R}\left(L_0 - \frac{mV_0^2}{T_0}\right) = 1,6$$

2.

$$\tau = \frac{1}{2V_0 R}\left[L_0^2 - \left(\frac{mV_0^2}{T_0}\right)^2\right] = 15 \text{ с}$$

Критерии оценивания

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).

Правильно найдено число оборотов нити (+1).

Для нахождения времени движения использован метод разбиения на малые промежутки (+1).

Получена связь между длительностью промежутка и углом поворота (+1).

Правильно вычислены все необходимые суммы (+1).

Получен правильный ответ для времени движения (+1).

Задача 3. В закрытом горизонтальном цилиндре может без трения двигаться поршень, прикреплённый пружиной к правому торцу цилиндра. Слева от поршня находится гелий, справа — вакуум. В начальном состоянии поршень закреплён, пружина не деформирована, объём гелия $V_1 = 2$ л, температура $T_1 = 300$ К. Поршень отпускают, и через некоторое время система приходит в состояние механического и теплового равновесия, в котором объём гелия $V_2 = 3$ л. Считая, что стенки цилиндра и поршень не проводят тепло, найдите температуру T_2 гелия в этом состоянии.

Возможное решение

Пусть a – начальная длина левой части цилиндра, x – сжатие пружины, k– жёсткость пружины, S – площадь поперечного сечения поршня, ν – число молей газа, P_1 и P_2 – начальное и конечное давления, R — универсальная газовая постоянная. Начальный и конечный объёмы газа равны:

$$V_1 = Sa\,, \quad V_2 = S\,(a+x)\,.$$

Рассмотрим баланс энергии для системы (газ + поршень):

$$\frac{3}{2}\,\nu R T_1 = \frac{3}{2}\,\nu R T_2 + \frac{kx^2}{2}\,.$$

В конечном состоянии имеем:

$$P_2 S = kx\,, \quad P_2 S\,(a+x) = \nu R T_2 \quad \longrightarrow \quad k = \frac{P_2 S}{x} = \frac{\nu R T_2}{x\,(a+x)}\,.$$

Подставляя это значение k в уравнение баланса энергии и сокращая на $\nu R/2$, получаем:

$$3T_1 = 3T_2 + \frac{T_2\,x}{(a+x)}\,.$$

Далее имеем:

$$\frac{x}{a+x} = \frac{Sx}{S\,(a+x)} = \frac{V_2 - V_1}{V_2}\,,$$

$$3T_1 = 3T_2 + T_2\,\frac{(V_2 - V_1)}{V_2} \quad \longrightarrow \quad T_1 = T_2\left(1 + \frac{V_2 - V_1}{3V_2}\right) = T_2\,\frac{(4V_2 - V_1)}{3V_2}\,.$$

Отсюда находим T_2:

$$T_2 = T_1\,\frac{3V_2}{(4V_2 - V_1)} = 270 \text{ К}$$

Ответ:

$$T_2 = T_1\,\frac{3V_2}{(4V_2 - V_1)} = 270 \text{ К}$$

Критерии оценивания

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).

Записано уравнение баланса энергии (+1).
Записано условие равновесия поршня в конечном состоянии (+1).
Записано уравнение состояния (+1).
Найдена жёсткость пружины (+1).
Получен правильный ответ (+1).

Задача 4. Плоский конденсатор состоит из трёх одинаковых тонких проводящих пластин, расположенных параллельно друг другу. Расстояние между левой и средней пластинами в два раза больше, чем между средней и правой. Конденсатор заряжают, присоединив левую пластину к положительному полюсу батареи, а правую к отрицательному. Найдите, на какую величину Δq изменится заряд конденсатора, если средней пластине сообщить заряд $q_0 = 1,8$ нКл. Числовой ответ выразите в нанокулонах. Краевыми эффектами пренебрегите.

Возможное решение

Обозначим через d расстояние между средней и правой пластинами. Тогда расстояние между между левой и средней пластинами равно $2d$. Пусть q_1 — заряд конденсатора в случае, когда средняя пластина не заряжена. Введём поверхностную плотность заряда на левой пластине:

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{S},$$

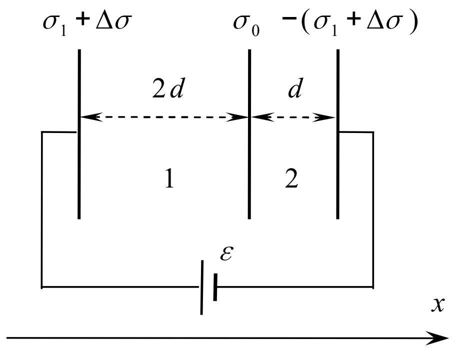
S — площадь пластин. Плотность заряда на правой пластине равна $-\sigma_1$. Направим ось x от левой пластины к правой. Вектор напряжённости электрического поля в конденсаторе направлен вдоль этой оси. Абсолютная величина напряжённости равна:

$$E = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0},$$

ϵ_0 — электрическая постоянная. Напряжение на конденсаторе равно ЭДС батареи ε. Связь между напряжением и напряжённостью поля определяется соотношением:

$$\varepsilon = 3dE \quad \longrightarrow \quad \varepsilon = \frac{3d\sigma_1}{\epsilon_0}.$$

Здесь $3d$ — расстояние между крайними пластинами.



Рассмотрим теперь случай, когда средняя пластина несёт заряд q_0. Введём плотность заряда на этой пластине:

$$\sigma_0 = \frac{q_0}{S}.$$

Плотность заряда на левой пластине запишем как $\sigma_1 + \Delta\sigma$. Тогда плотность заряда на правой пластине равна $-(\sigma_1 + \Delta\sigma)$. Назовём областью 1 часть конденсатора между левой и средней пластинами, областью 2 — часть между средней и правой. В этих областях проекции вектора напряжённости электрического поля на ось x равны:

$$E_{1x} = \frac{\sigma_1 + \Delta\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}, \quad E_{2x} = \frac{\sigma_1 + \Delta\sigma}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}.$$

Для напряжения имеем:

$$\varepsilon = 2dE_{1x} + dE_{2x} = \frac{d}{\epsilon_0}\left(2\sigma_1 + 2\Delta\sigma - \sigma_0 + \sigma_1 + \Delta\sigma + \frac{\sigma_0}{2}\right) = \frac{3d\sigma_1}{\epsilon_0} + \frac{d}{\epsilon_0}\left(3\Delta\sigma - \frac{\sigma_0}{2}\right).$$

Используя соотношение $\varepsilon = 3d\sigma_1/\epsilon_0$, получаем:

$$\varepsilon = \varepsilon + \frac{d}{\epsilon_0}\left(3\Delta\sigma - \frac{\sigma_0}{2}\right) \quad \longrightarrow \quad 3\Delta\sigma - \frac{\sigma_0}{2} = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta\sigma = \frac{\sigma_0}{6}.$$

Изменение заряда конденсатора равно:

$$\Delta q = S\Delta\sigma = \frac{S\sigma_0}{6} = \frac{q_0}{6} = 0,3 \text{ нКл}$$

Ответ:

$$\Delta q = \frac{q_0}{6} = 0,3 \text{ нКл}$$

Критерии оценивания

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).

Записана связь между напряжённостью и напряжением на конденсаторе (+1).

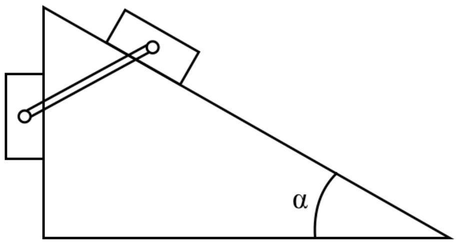
Записано выражение для напряжённости поля в левой области в случае заряженной средней пластины (+1).

Записано выражение для напряжённости поля в правой области (+1).

Записана связь между напряжённостями и напряжением (+1).

Получен правильный ответ (+1).

Задача 5. На наклонной плоскости покоятся два груза, соединенные стержнем (см. рисунок). Найдите угол между стержнем и горизонтом, если $\alpha = 30^\circ$, а масса правого груза втрое больше левого.



Возможное решение

Требуется записать уравнения Ньютона для каждого бруска в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси. Будем считать первым левый брусок, а правый вторым. Составим уравнения:
$N_2 \cos\alpha = m_2 g + T \sin\beta$
$N_2 \sin\alpha = T \cos\beta$
$T \sin\beta = m_1 g$
Решая систему получаем: $tg\beta = \frac{1}{tg\alpha}\frac{m_1}{m_1+m_2}$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Критерии оценивания

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 5 баллов (максимальный балл за задачу).

Правильно составлена система уравнений (+3).

Получена конечная формула или численный ответ (+2).