9 класс

Задача 9.1. Рыбак Вася поймал несколько рыб. Три самые большие рыбины, составляющие 35% веса всего улова, он положил в холодильник. Три самые маленькие, составляющие 5/13 веса всех оставшихся, рыбак отдал коту. Всю остальную пойманную рыбу Вася съел сам. Сколько рыб поймал Вася?

Ответ: 10.

Решение. Из условия следует, что коту досталось $65\% \cdot \frac{5}{13} = 25\%$ веса улова. Следовательно, Вася съел 40% пойманной рыбы. Если обозначить через x количество съеденных Васей рыб, то средний вес съеденных рыб в процентах от веса всего улова составляет $40/x$. По условию, указанная величина не превосходит среднего веса рыб в холодильнике и не меньше среднего веса рыб, съеденных котом. В результате получаем неравенство

$$\frac{35}{3} \leqslant \frac{40}{x} \leqslant \frac{25}{3},$$

которому удовлетворяет только $x = 4$. Таким образом, общее количество пойманных рыб равно $4 + 3 + 3 = 10$. □

Критерии

Любое верное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

2 б. Верно посчитан процент съеденных Васей рыб.

2 б. Составлено хотя бы одно из неравенств $\frac{35}{3} \leqslant \frac{40}{x} \leqslant \frac{25}{3}$.

Следующий критерий применяется только в отсутствие баллов за другие продвижения:

1 б. Есть верный ответ.

Задача 9.2. На вечеринке собралось 24 человека. Гость считается интровертом, если у него не более трех знакомых среди остальных гостей. Оказалось, что у каждого гостя не менее трех знакомых-интровертов. Какое количество интровертов могло быть на вечеринке? Приведите все ответы и докажите, что других нет.

Ответ: 24.

Решение. Пусть a — количество пар знакомых друг с другом интровертов, а b — количество пар знакомых, в которых один из пары является интровертом. Каждый пришедший на вечеринку входит не менее чем в три пары, поскольку у него не менее трех знакомых-интровертов, при этом пары интроверт-интроверт учитываются дважды. Значит, $2a + b \geqslant 3 \cdot 24$.

С другой стороны, каждый интроверт может входить не более чем в три пары, то есть $2a+b$ не больше утроенного числа интровертов. В результате заключаем, что утроенное число интровертов не меньше утроенного числа гостей, что возможно лишь если все пришедшие на вечеринку являются интровертами. □

Другое решение. Из условия следует, что каждый интроверт знаком с тремя интровертами и больше ни с кем; то есть знакомства между интровертами и экстравертами (назовем так остальных людей) невозможны. Но тогда экстраверт не может быть знаком с тремя интровертами, как того требует условие. Значит, экстравертов на этой вечеринке просто нет. □

Критерии

Любое верное решение задачи оценивается в 7 баллов.

Решения, необоснованно использующие то, что некоторые случаи являются «оптимальными» («наилучшими», «наихудшими», и т. п.), не засчитываются.

В отсутствие верного решения используется следующий критерий:

1 б. Есть верный ответ.

Задача 9.3. Окружность ω с центром в точке I вписана в выпуклый четырехугольник $ABCD$ и касается стороны AB в точке M, и стороны CD — в точке N, при этом $\angle BAD + \angle ADC < 180°$. На прямой MN выбрана точка $K \neq M$ такая, что $AK = AM$. В каком отношении прямая DI может делить отрезок KN? Приведите все возможные ответы и докажите, что других нет.

Ответ: $1 : 1$.

Решение. Пусть P — точка пересечения прямых AB и CD (такая есть по условию, иначе

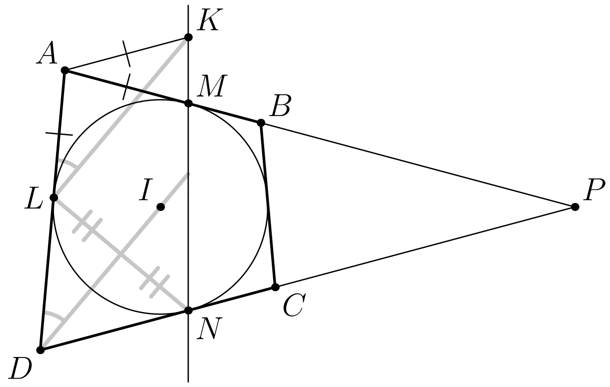

Рис. 1: к решению задачи 9.3

$\angle BAD + \angle ADC = 180°$). Тогда треугольник PMN равнобедренный, а значит,

$$\angle BMN = \angle CNM = \frac{180° - \angle MPN}{2} = \frac{\angle BAD + \angle ADC}{2} < 90°\,.$$

Следовательно, точка K лежит на продолжении отрезка MN за точку M, причем

$$\angle CNM = \angle BMN = \angle KMA = \angle AKM\,,$$

в частности, треугольники AKM и PNM подобны.

Рассмотрим треугольник KAL. Он равнобедренный ($AK = AM = AL$) и, следовательно,

$$\angle ALK = 90° - \frac{\angle KAL}{2} = 90° - \frac{\angle KAM + \angle MAL}{2} = \\ = 90° - \frac{\angle PAD + \angle APD}{2} = \frac{\angle ADP}{2} = \angle ADI\,.$$

Это означает, что $KL \parallel DI$.

Поскольку DI — биссектриса равнобедренного треугольника LDN, то DI делит пополам отрезок LN. Также из условия параллельности ID и KL следует, что DI — средняя линия треугольника KNL, а значит, прямая DI делит отрезок KN пополам. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

3 б. Доказана параллельность DI и LK.

2 б. Доказана параллельность AK и DC.

1 б. Отмечено равенство $\angle AMN = \angle DNM$ или смежных с ними.

За отсутствие обоснования взаимного расположения точек (например, положения точки M относительно K и N) баллы не снижаются.

Задача 9.4. Известно, что число 400 000 001 является произведением двух простых чисел p и q. Найдите сумму натуральных делителей числа $p+q-1$.

Ответ: 45864.

Решение. Число $n = 400\,000\,001$ можно записать в следующем виде

$$n = 4\cdot 10^8 + 1 = 4\cdot 10^8 + 4\cdot 10^4 + 1 - 4\cdot 10^4 = \\ = (2\cdot 10^4+1)^2 - (2\cdot 10^2)^2 = (2\cdot 10^4 + 2\cdot 10^2 + 1)(2\cdot 10^4 - 2\cdot 10^2 + 1)\,.$$

Поскольку n есть произведение двух простых чисел p и q, то именно это разложение и получено выше. Следовательно,

$$p+q-1 = 2\cdot 10^4 + 2\cdot 10^2 + 1 + 2\cdot 10^4 - 2\cdot 10^2 + 1 - 1 = 4\cdot 10^4 + 1\,.$$

Для разложения последнего числа на множители применим тот же трюк.

$$4\cdot 10^4 + 1 = 4\cdot 10^4 + 4\cdot 10^2 + 1 - 4\cdot 10^2 = (2\cdot 10^2+1)^2 - (2\cdot 10)^2 = \\ = (201-20)(201+20) = 181\cdot 221 = 13\cdot 17\cdot 181\,.$$

Сумма натуральных делителей полученного числа может быть найдена, например, по формуле

$$(13+1)(17+1)(181+1) = 45864\,.$$ □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

5 б. Получено правильное разложение на простые множители числа $p+q-1$, но в результате ошибки получен неправильный ответ.

4 б. Ответ дан в предположении, что $p+q-1 = 181\cdot 221$ — разложение на простые множители.

3 б. Правильно вычислено значение $p+q-1$.

В любом из случаев выше снижаются баллы за следующий недочет:

–2 б. Приведено верное разложение данного в задаче числа на множители, но не показано ни откуда это разложение взялось, ни что оно действительно в произведении дает нужное число.

Задача 9.5. Положительные числа a, b и c таковы, что выполнены равенства

$$a^2+ab+b^2 = 1\,,\quad b^2+bc+c^2 = 3\,,\quad c^2+ca+a^2 = 4\,.$$

Найдите $a+b+c$.

Ответ: $\sqrt{7}$.

Решение. Отложим из одной точки T отрезки TA, TB и TC с длинами a, b и c соответт-

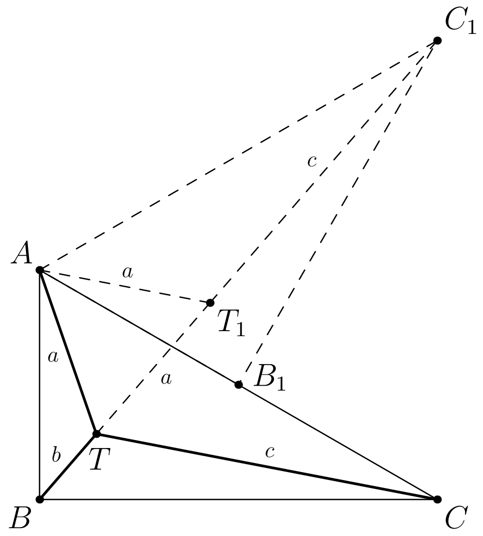

Рис. 2: к решению задачи 9.5

ственно так, чтобы $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$. Тогда по теореме косинусов, при учете соотношения $\cos 120° = -1/2$, получаем, что $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$, $CA = 2$. Видим, что по теореме Пифагора треугольник ABC прямоугольный ($\angle B = 90°$), причем его катет AB в два раза короче гипотенузы AC, откуда следуют равенства $\angle BAC = 60°$, $\angle BCA = 30°$.

Отметим точку B_1 — середину гипотенузы AC и такую точку C_1, что $\triangle ABC = \triangle AB_1C_1$ и точки C_1 и B по разные стороны от AC (рис. 2). По построению треугольники ABC и AB_1C_1 отличаются поворотом на $60°$ с центром в точке A. Отметим точку T_1 в треугольнике AB_1C_1, соответствующую точке T в треугольнике ABC. Тогда $BT = B_1T_1$, $CT = C_1T_1$ и $AT = AT_1 = TT_1$. Последнее равенство обусловлено тем, что треугольник ATT_1 получается равносторонним, поскольку точки T и T_1 отличаются поворотом на $60°$ с центром в точке A.

Осталось заметить, что точки B, T, T_1 и C_1 лежат на одной прямой, поскольку $\angle ATB = \angle AT_1C_1 = 120°$ и $\angle ATT_1 = \angle AT_1T = 60°$. В итоге получаем, что

$$a + b + c = AT + BT + CT = BT + TT_1 + T_1C_1 = BC_1\,,$$

а BC_1 может быть вычислено из теоремы косинусов для треугольника BAC_1:

$$BC_1^2 = AB^2 + AC_1^2 + AB \cdot AC_1 = 1 + 4 + 1 \cdot 2 = 7\,. \qquad \square$$

Другое решение. Получим ответ алгебраическими методами. Вычтем из первого равенства второе. Получим $(a-c)(a+c) + b(a-c) = -2$, т. е.

$$a + b + c = \frac{-2}{a-c}\,.$$

Аналогично, вычитая из второго равенства третье и из третьего первое, получим

$$a + b + c = \frac{-2}{a-c} = \frac{-1}{b-a} = \frac{3}{c-b}\,.$$

Если обозначить $s = a + b + c$, то можно переписать предыдущие соотношения как

$$a - c = -2s^{-1}\,, \quad b - a = -s^{-1}\,, \quad c - b = 3s^{-1}\,.$$

Теперь сложим все исходные равенства:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + ab + bc + ca = 8\,. \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что левую часть можно выразить следующим образом:

$$(a+b+c)^2 + \frac{1}{2}\big((a-c)^2 + (b-a)^2 + (c-b)^2\big) = 8\,,$$

что означает

$$s^2 + \frac{1}{2}(4s^{-2} + s^{-2} + 9s^{-2}) = 8\,.$$

Домножением на s^2 получаем квадратное уравнение относительно s^2

$$s^4 - 8s^2 + 7 = 0\,,$$

корнями которого являются $s^2 = 1$ и $s^2 = 7$. Однако первое из значений явно вступает в противоречие с равенством (1):

$$s^2 = (a+b+c)^2 > a^2 + b^2 + c^2 + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}bc + \tfrac{1}{2}ca = 4\,.$$

Значит, остается $s^2 = 7$, то есть $a + b + c = s = \sqrt{7}$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

6 б. Верное в остальном решение с неправильным ответом, полученным в результате арифметической ошибки.

6 б. Получено несколько ответов и не исключены неверные.

3 б. Произведен переход к геометрической задаче: рассмотрен треугольник со сторонами 1, $\sqrt{3}$, 2 и точка внутри него на расстояниях a, b, c от вершин.

2 б. Разности $a-b$, $b-c$ и $c-a$ выражены через $a+b+c$.

1 б. Есть верный ответ.

0 б. Алгебраические преобразования, не приведшие к решению.