6 класс

Задача 6.1. У Джерри есть девять карточек с цифрами от 1 до 9. Он выкладывает их в ряд, образуя девятизначное число. Том выписывает на доску все 8 двузначных чисел, образованных соседними цифрами (например, для числа 789456123 это числа 78, 89, 94, 45, 56, 61, 12, 23). За каждое двузначное число, делящееся на 9, Том отдает Джерри кусочек сыра. Какое наибольшее количество кусочков сыра может получить Джерри?

Ответ: 4.

Решение. Заметим, что из двузначных чисел на 9 делятся только 18, 27, 36, 45, и числа, получающиеся из них перестановкой цифр (также есть 90 и 99, но у нас нет в распоряжении цифры 0 и только одна цифра 9). Таким образом, только четыре пары цифр из имеющихся могут образовать число, делящееся на 9. Чтобы получить пример, надо все эти пары собрать в любом порядке:

$$1\,8\,2\,7\,3\,6\,4\,5\,9.$$ □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

3 б. Доказано, что 5 двузначных чисел, делящихся на 9, получить нельзя.

3 б. Приведен пример с 4 двузначными числами, делящимися на 9.

1 б. Есть верный ответ.

Задача 6.2. Квадрат со стороной 1 м разрезан на три прямоугольника с равными периметрами. Чему могут равняться эти периметры? Укажите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

Ответ: 8/3 или 5/2.

Решение. Заметим, что с точностью до поворота разрезать квадрат на три прямоугольника можно только следующими двумя способами:

Первое разрезание. Заметим, что если у прямоугольников одинаковая длина, то периметр может совпадать только если и ширина одинаковая. Следовательно, такие прямоугольники равны, и ширина у них по 1/3, то есть периметр равен $2 + 2/3 = 8/3$.

Второе разрезание. Пусть левый прямоугольник имеет размеры $x \times 1$, а правые, обладающие одинаковой шириной и, тем самым, длиной, имеют размеры $(1 - x) \times 1/2$. Равенство периметров записывается в виде уравнения

$$2 + 2x = 2 \cdot (1 - x) + 2 \cdot 1/2\,.$$

Отсюда $x = \frac{1}{4}$ и периметры равны $2 + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

2 б. Задача решена для первого случая.

4 б. Задача решена для второго случая.

1 б. Есть верный ответ.

Снижаются баллы за следующий недочет в решении, которое в остальном верно:

–1 б. Верно составлено уравнение, но допущена арифметическая ошибка. За каждый из случаев снимается не более чем по 1 баллу.

Задача 6.3. Страна имеет форму квадрата и разделена на 25 одинаковых квадратных графств. В каждом графстве правит либо граф-рыцарь, который всегда говорит правду, либо граф-лжец, который всегда лжет. Однажды каждый граф сказал: «Среди моих соседей поровну рыцарей и лжецов.» Какое максимальное число рыцарей могло быть? (Графы являются соседями, если их графства имеют общую сторону.)

Ответ: 8.

Решение. Для начала заметим, что графства, у которых ровно три соседних, обязательно управляются графами-лжецами (рис. ??). Следовательно, и угловые графства тоже управляются лжецами, поскольку оба их соседа лжецы.

	Л	Л	Л	
Л				Л
Л				Л
Л				Л
	Л	Л	Л	

Рис. 1: к решению задачи ??

Осталось разобраться с центральным квадратом 3×3. Все клетки не могут быть заняты рыцарями, поскольку тогда у центрального рыцаря все соседи являются рыцарями. Значит, рыцарей не более 8. Пример с восемью рыцарями приведен на рис. ??. □

	Р	Р	Р	
	Р		Р	
	Р	Р	Р	

Рис. 2: к решению задачи ??

Критерии

Любое верное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

4 б. Доказано, что рыцари могут находиться только в центральном квадрате 3×3.

2 б. Приведен пример для 8 рыцарей.

Следующий критерий используется только в отсутствие баллов за другие продвижения:

1 б. Есть верный ответ.

Задача 6.4. Все делители натурального числа n выписали в строку в порядке возрастания от 1 до самого n. Оказалось, что предпоследнее число в строке в 101 раз больше второго. Для какого наибольшего n это возможно?

Ответ: 101^3.

Решение. Пусть p — минимальный делитель числа n, отличный от 1, тогда p — простое число, иначе были бы меньшие делители. Таким образом, первые два числа в строке будут равны 1 и p, а последние два — равны $\frac{n}{p}$ и n. По условию задачи имеем $\frac{n}{p} = 101p$, или, иными словами, $n = 101p^2$.

Поскольку p — наименьший простой делитель n, верно неравенство $p \leqslant 101$. Следовательно, $n \leqslant 101^3$. Число 101^3 подходит. □

Критерии

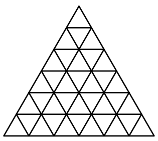
Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

4 б. Получено уравнение вида $\frac{n}{p} = 101p$.

1 б. Есть верный ответ.

Задача 6.5. Равносторонний треугольник разделен на 36 одинаковых равносторонних треугольников. При каких k его можно разрезать по линиям сетки на k одинаковых многоугольников?



Ответ: 1, 3, 4, 9, 12, 36.

Решение. В первую очередь отметим, что k должно быть делителем числа 36. На рис. **??** указаны разрезания на 1, 3, 4, 9, 12, 36 одинаковых частей. Осталось доказать, что на 2,

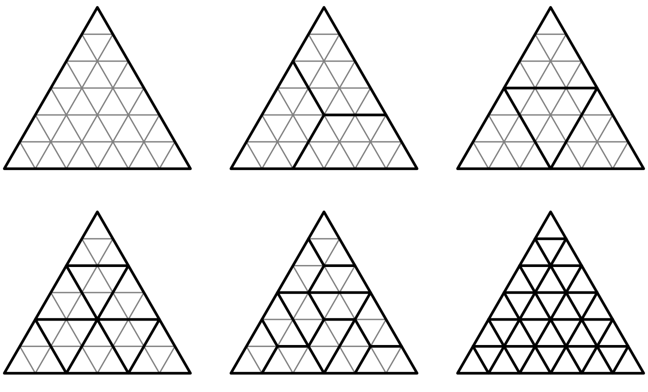


Рис. 3: к решению задачи **??**

6 и 18 частей треугольник разрезать нельзя.

Раскрасим треугольник в белый и черный цвет «шахматной» раскраской, т. е. так, чтобы соседние треугольнички были разных цветов и угловые треугольнички оказались черными (рис. **??**). Тогда у нас будет 15 белых треугольничков и 21 черный.

Если теперь предположить, что нам удалось разрезать треугольник на две равные части, и в одной из них n белых и m черных треугольничков, то во второй будет либо тоже n белых

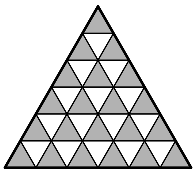


Рис. 4: к решению задачи **??**

и m черных, либо наоборот. В первом случае оказывается, что суммарное количество черных во всем треугольнике равно $2m$, но оно нечетно; во втором случае суммарные количества черных и белых оказываются оба равны $n+m$, но они различны. Так или иначе, мы приходим к противоречию.

Разрезание на 18 равных частей невозможно, поскольку каждая такая часть обязана состоять из двух соседних треугольничков, то есть из одного белого и одного черного; при суммировании всех частей это опять-таки вступит в противоречие с тем, что черных и белых не поровну.

Наконец, покажем, что невозможно разрезание на 6 одинаковых фигур. Предположим, что такое разрезание существует, тогда каждая фигура состоит из 6 маленьких треугольников. Пусть в одной из фигур n черных и m белых треугольничков. Остальные фигуры разрезания состоят либо тоже из n черных и m белых, либо наоборот, из m черных и n белых. При этом n и m имеют одинаковую четность, так как $n+m=6$. Тогда, если просуммировать количество черных треугольничков по всем шести фигурам, мы получим сумму шести чисел одинаковой четности, то есть четное значение; однако, общее количество черных треугольничков нечетно.

Замечание 1. Доказать, что разрезания на две равных части не существует, можно и другим способом: ровно в одной из частей такого разрезания будут содержатся две вершины исходного треугольника, а значит, в одной из частей будет отрезок, равный по длине стороне треугольника, а в другой — нет.

Замечание 2. Доказать, что разрезание на 18 «ромбиков» из двух треугольничков не существует, также можно другим способом. Рассмотрим шесть треугольничков, прилегающих к одной из сторон. Ромбик, содержащий крайний из них, выделяется однозначно; ромбик, содержащий следующий треугольничек, также строится однозначно, и т. д., а с шестым треугольничком ромбик построить уже оказывается невозможно. □

Критерии

Если в ответе или в решении не учтен случай разрезания на 1 часть — баллы не снижаются.

То, что k является делителем 36, считается очевидным; за использование этого факта без обоснования баллы не снижаются; за его доказательство баллы не добавляются.

Любое верное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

2 б. Приведены или описаны верные примеры разрезаний на k частей для всех k из 3, 4, 9, 12, 36.

Если имеются примеры не для всех таких k, но хотя бы для двух различных из 3, 4, 9, 12, 36, то вместо 2 баллов по этому критерию дается 1.

2 б. Доказано, что на 2 части разрезать нельзя.

2 б. Доказано, что на 6 частей разрезать нельзя.

1 б. Доказано, что на 18 частей разрезать нельзя.

Следующий критерий применяется только в отсутствие баллов за другие продвижения:

1 б. Есть верный ответ.