10 класс

Задача 10.1. Из города A в город B, находящийся на расстоянии 240 км от A, со скоростью 40 км/ч выходит автобус. Одновременно с ним из B в A выезжает автомобиль со скоростью v км/ч. Через полчаса после встречи с автобусом автомобиль, не доезжая до города A, поворачивает обратно и с прежней скоростью движется по направлению к B. Определить все значения v, при которых автомобиль приходит в B раньше, чем автобус.

Ответ: $v \in (56; 120)$.

Решение. Пусть t — это время встречи, измеренное в часах. Тогда по условию $t = \frac{240}{v+40}$. Далее в условии сказано, что автомобиль, проехав полчаса, не доехал до пункта A, что приводит к неравенству $v(t + 0{,}5) < 240$, которое равносильно следующему:

$$\frac{240}{v} - \frac{240}{v+40} > 0{,}5\,.$$

Учитывая положительность знаменателей, получаем равносильное квадратичное неравенство $v^2 + 40v - 19200 < 0$, откуда $v \in (-160, 120)$. Так как v положительно, заключаем, что $v < 120$.

Далее, условие о том, что автомобиль, развернувшись, приедет в B раньше автобуса, можно трактовать так: удвоенное время, затраченное автомобилем от точки старта до разворота, меньше времени $240/40 = 6$ ч, необходимого для автобуса. Получаем

$$2\left(\frac{240}{v+40} + 0{,}5\right) < 6\,,$$

что эквивалентно неравенству $v > 56$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

2 б. Получена только оценка снизу.

2 б. Получена только оценка сверху.

Снижаются баллы за следующий недочет в решении, которое в остальном верно:

–1 б. В ответ ошибочно включены один или оба конца интервала.

Задача 10.2. Окружность ω с центром в точке I вписана в выпуклый четырехугольник $ABCD$ и касается стороны AB в точке M, и стороны CD — в точке N, при этом $\angle BAD + \angle ADC < 180^\circ$. На прямой MN выбрана точка $K \neq M$ такая, что $AK = AM$. В каком отношении прямая DI может делить отрезок KN? Приведите все возможные ответы и докажите, что других нет.

Ответ: 1 : 1.

Решение. См. решение задачи **??**. □

Задача 10.3. Определите все натуральные числа n, имеющие ровно $\sqrt{n}$ натуральных делителей (включая 1 и само число n).

Ответ: 1 и 9.

Решение. Во-первых, заметим что $n = 1$ подходит, и будем считать, что $n \geqslant 2$. Во-вторых, из условия следует, что $n = k^2$ для некоторого натурального k. Квадраты натуральных чисел имеют нечетное количество делителей, поскольку все делители, кроме основания квадрата, разбиваются на пары вида d и n/d. Таким образом, k — нечетное число, большее 1. Пусть $k = 2m+1$ для некоторого натурального m. Число n имеет m делителей, меньших k, и m делителей, больших k, причем все делители нечетны. Это означает, что n делится на все нечетные натуральные числа, меньшие k, поскольку их ровно m.

В частности, k^2 делится на $k-2$. Поскольку $k^2-4 = (k-2)(k+2)$ тоже делится на $k-2$, то и разность $4 = k^2 - (k^2 - 4)$ кратна числу $k - 2$. Осталось заметить, что $k - 2$ — нечетный делитель числа 4, то есть $k - 2 = 1$, откуда $k = 3$ и $n = 9$. $\square$

Критерии

Любое верное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

1 б. Отмечается, что все делители числа n нечетные.

1 б. Установлена нечетность числа n.

1 б. Отмечено, что число является точным квадратом.

Верный ответ без верного решения не оценивается.

Задача 10.4. Положительные числа a, b и c таковы, что выполнены равенства

$$a^2 + ab + b^2 = 1\,, \quad b^2 + bc + c^2 = 3\,, \quad c^2 + ca + a^2 = 4\,.$$

Найдите $a + b + c$.

Ответ: $\sqrt{7}$.

Решение. См. решение задачи **??**. $\square$

Задача 10.5. В каждой клетке квадратной таблицы размером 200×200 написали по действительному числу, по модулю не превосходящему 1. Оказалось, что сумма всех чисел равна нулю. Для какого наименьшего S можно утверждать, что в какой-то строке или каком-то столбце сумма чисел заведомо окажется по модулю не превышающей S?

Ответ: 100.

Решение. Сначала покажем, что $S < 100$ не подойдет. Разделим таблицу на четыре квадрата 100×100. Правый верхний квадрат заполним числами $+1$, а левый нижний — числами -1. Остальные клетки заполним нулями. Легко видеть, что в каждой строке и в каждом столбце сумма равна ± 100.

Теперь покажем, что $S = 100$ подходит. Предположим, что для некоторой таблицы это не так, то есть суммы во всех её строках и столбцах оказались либо больше 100, либо меньше -100. Заметим, что можно менять местами строки в таблице, не нарушая это свойство и условие задачи.

Поменяем местами строки так, чтобы их суммы убывали сверху вниз. Разделим таблицу на две половины 100×200, верхнюю и нижнюю. Заметим, что либо в верхней половине все строки имеют положительную сумму, либо в нижней — все отрицательную. Тогда в одной из половин сумма по модулю больше 10 000. Так как общая сумма всех чисел равна нулю, то в другой половине сумма такая же по модулю и противоположная по знаку.

Теперь отсортируем столбцы так, чтобы их суммы убывали слева направо. (Суммы в строках при этом не поменяются.) Аналогично, суммы в правой и в левой половине таблицы оказались по модулю больше 10 000.

Разобъем таблицу на четыре квадрата 100×100, суммы в них обозначим за A, B, C, D:

A	B
C	D

$$A + B > +10\,000 \qquad A + C > +10\,000$$
$$C + D < -10\,000 \qquad B + D < -10\,000$$

Заметим, что

$$2|A| + 2|D| \geqslant 2A - 2D = (A + B) + (A + C) - (B + D) - (C + D) > 40\,000\,.$$

Это означает, что одно из чисел A или D по модулю превосходит 10 000. Но в каждом из соответствующих квадратов всего 10 000 клеток, и числа в них по модулю не превосходят 1. Противоречие. □

Критерии

Любое верное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

1 б. Есть верный ответ.

1 б. «Пример». Доказано, что $S < 100$ невозможно (т. е. приведен пример или доказано его существование).

5 б. «Оценка». Доказано, что $S = 100$ подходит для любой расстановки чисел, удовлетворяющей условию. В отсутствие полного доказательства «оценки» засчитывается следующее частичное продвижение:

- 1 б. Отмечается, что можно переставлять строки и столбцы, и есть идея упорядочить строки и столбцы по возрастанию или убыванию.

Оценки, необоснованно использующие то, что некоторые расстановки чисел являются «оптимальными» («наилучшими», «наихудшими», и т. п.), не засчитываются.