Олимпиада «Курчатов», интернет-тур
Решения задач

Содержание

1 Интернет-тур

1.1 6–7 классы

1. За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут; всего 12 человек. Каждый из сидящих заявил: «напротив меня сидит лжец». Сколько лжецов было за столом?

Ответ: 6.

Разобьем людей на 6 пар сидящих друг напротив друга. Заметим, что в паре не может быть двух рыцарей (иначе бы они оба солгали) и не может быть двух лжецов (иначе бы они оба сказали правду). Значит, в каждой паре ровно один лжец, и всего лжецов 6. $\square$

2. При умножении пятизначного числа на 9 получилось число, составленное из тех же цифр, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

Ответ: 10989.

Пусть $\overline{abcde}$ — исходное число. Условие записывается в виде уравнения $9 \cdot \overline{abcde} = \overline{edcba}$. Заметим, что $a = 1$, так как если $a \geqslant 2$, то $9 \cdot \overline{abcde} \geqslant 9 \cdot 20000 > 100000 > \overline{edcba}$.

Имеем $9 \cdot \overline{1bcde} = \overline{edcb1}$. Отсюда однозначно восстанавливается последняя цифра $e = 9$.

Работаем с $9 \cdot \overline{1bcd9} = \overline{9dcb1}$. Заметим, что если $b \geqslant 2$, то $9 \cdot \overline{1bcd9} > 9 \cdot 12000 > 100000 > \overline{edcba}$. Значит, $b = 0$ или $b = 1$. Рассмотрим эти два случая:

Если $b = 0$, то уравнение приводится к виду $9 \cdot \overline{10cd9} = \overline{9dc01}$. Рассмотрев вторую с конца цифру, приходим к выводу, что $d = 8$. Перебрав возможные варианты цифры c, находим единственное решение $\overline{abcde} = 10989$.

Если же $b = 1$, то уравнение переписывается в $9 \cdot \overline{11cd9} = \overline{9dc11}$. Анализируя вторую с конца цифру, получаем $d = 7$. Но $9 \cdot \overline{11c79} > 9 \cdot 11000 = 99000 > \overline{97c11}$, противоречие. Значит, в случае $b = 1$ решений нет.

Единственное число, удовлетворяющее условию задачи — 10989. □

3. Пару чисел назовем *магической*, если числа в паре в сумме делятся на 7. Какое максимальное количество магических пар рядом стоящих чисел может получиться при выписывании всех чисел от 1 до 30 в ряд в некотором порядке?

Ответ: 26.

Пример: 1, 6, 8, 13, 15, 20, 22, 27, 29, 2, 5, 9, 12, 16, 19, 23, 26, 30, 3, 4, 10, 11, 17, 18, 24, 25, 7, 14, 21, 28. Несложно видеть, что в этом ряду лишь пары $(29, 2), (30, 3), (25, 7)$ не являются магическими.

Оценка: предположим, что можно сделать не менее 27 пар магическими. Тогда будет не более двух немагических пар. Раскрасим все числа от 1 до 30 в четыре цвета следующим образом в зависимости от того, какой остаток при делении на 7 они дают: числа с остатками 1 или 6 — в красный цвет; с остатками 2 или 5 — в синий; с остатками 3 или 4 — в фиолетовый; с остатком 0 — в оранжевый.

Заметим, что числа в магической паре обязательно одного цвета. Следовательно, если было не более двух немагических пар, то при движении вдоль строки слева направо цвет сменился бы не более двух раз, т. е. цветов было не более трех. Но их четыре, противоречие. □

4. В велогонках по круговому треку принимали участие три юных спортсмена. Первым к финишу пришел Петя, причем он обогнал Васю ровно на один круг и обогнал Толю ровно на два круга. Выяснилось, что каждый круг Петя проезжал на три секунды быстрее Васи и на семь секунд быстрее Толи. Сколько кругов составляла дистанция?

Ответ: 8.

Обозначим число кругов, пройденных Петей, за n, и время, за которое он проходил один круг, за t. Посчитав суммарное время гонки тремя способами, приходим к уравнениям

$$n \cdot t = (n-1) \cdot (t+3) = (n-2) \cdot (t+7)\,.$$

Если раскрыть скобки и вычесть $n \cdot t$ из всех выражений, останется $0 = 3n - t - 3 = 7n - 2t - 14$. Вычтем из выражения $7n - 2t - 14$ удвоенное $3n - t - 3$, останется $n - 8 = 0$, $n = 8$. □

5. У Димы есть 25 одинаковых кирпичей размера $5 \times 14 \times 17$. Дима хочет построить из всех своих кирпичей одну башню, каждый раз добавляя сверху по одному кирпичу (каждый новый кирпич добавляет 5, 14 или 17 к высоте текущей башни). Назовем число n *построимым,* если Дима может построить башню высоты ровно n. Сколько существует построимых чисел?

Ответ: 98.

По сути, треубется найти количество разных по высоте башен, которые возможно построить из данного набора кирпичей.

Мысленно уменьшим длину, ширину и высоту каждого кирпича на 5: с $5\times14\times17$ до $0\times9\times12$. Тогда суммарная высота потенциальной башни уменьшится на $25 \cdot 5$, и число разных по высоте башен, составленных из новых кирпичей, будет совпадать с числом разных по высоте башен из старых. Уменьшим теперь размеры кирпичей в три раза: с $0\times9\times12$ до $0 \times 3 \times 4$. Размеры потенциальных башен уменьшатся также в три раза, и число разных по высоте башен вновь не изменится.

Таким образом, исходная задача равносильна следующей: сколько различных значений можно получить, складывая числа 0, 3, 4 в количестве 25? Заметим, что если в сумме хотя бы четыре раза встречается число 3, то набор 3, 3, 3, 3 можно заменить на набор 4, 4, 4, 0; при этой замене и сумма, и количество чисел сохранятся. Значит, можно рассматривать лишь те суммы, где число 3 встречается не более трех раз.

Если число 3 встречается 0 раз, то возможны 26 различных значений суммы: $0, 4, 8, \ldots, 4 \cdot 25$.

Если число 3 встречается 1 раз, то возможны 25 различных значений суммы: $3, 3+4, 3+8, \ldots, 3+4 \cdot 24$.

Если число 3 встречается 2 раза, то возможны 24 различные значения суммы: $6, 6+4, 6+8, \ldots, 6+4 \cdot 23$.

Если число 3 встречается 3 раза, то возможны 23 различные значения суммы: $9, 9+4, 9+8, \ldots, 9+4\cdot 22$.

Значения в первом, втором, третьем и четвертом списке дают остатки при делении на 4 соответственно 0, 3, 2, 1, и потому значения в разных списках разные.

Итого $26+25+24+23=98$ возможных значений высоты башни. □

6. Дно ящика представляет собой таблицу 8×8. Какое наименьшее ненулевое число плиток 2×1 или 1×2 можно расположить на дне ящика так, чтобы ни одну плитку нельзя было подвинуть ни по горизонтали, ни по вертикали? Каждая плитка должна занимать ровно две клетки, не занятые другими плитками.

Ответ: 28.

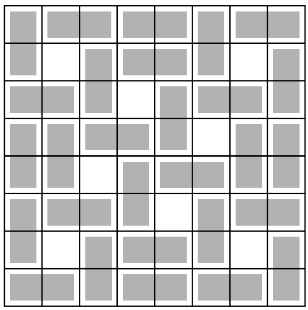
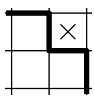


Рис. 1: к решению задачи 6.

Пример: схему расположения 28 плиток можно увидеть на рис. 1.

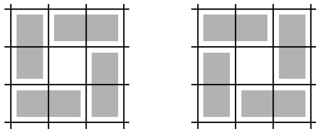
Оценка. Клетки, не покрытые плитками, назовем *пустыми.* Для начала докажем, что никакие две пустые клетки не могут быть соседними по стороне.

Предположим противное: какие-то две пустые клетки оказались соседними. Рассмотрим фигуру, образованную соседними по стороне пустыми клетками. Заметим, что фигура не может содержать вогнутых углов (рис.), так как плитку, закрывающая отмеченную крестиком клетку, можно подвинуть по вертикали, если она вертикальная, или по горизонтали, если она горизонтальная.



Если у фигуры нет вогнутых углов, то она — прямоугольник. Обозначим его размеры $a \times b$, где $a \geqslant b$. Ситуация $a \geqslant 3$ невозможна, так как хотя бы к одной из сторон прямоугольника длины a должны примыкать плитки (а не край ящика), но тогда плитку, примыкающую к некрайней клетке рассматриваемой стороны, можно задвинуть в прямоугольник. С помощью короткого перебора можно доказать, что прямоугольники 2×2 и 2×1 из пустых клеток также невозможны.

Итак, все пустые клетки изолированы. Никакая пустая клетка не может стоять у края доски, иначе одну из примыкающих к этой пустой клетке плиток можно задвинуть на эту пустую клетку. Плитки, примыкающие к пустой клетке, можно уложить всего двумя способами, показанными на рисунке.



Из этого, в частности, следует, что две пустые клетки не могут находиться в одной строке или одном столбце на расстоянии два, а также не могут являться соседними по диагонали.

Теперь мы готовы завершить оценку. Предположим, что можно обойтись менее, чем 28 плитками. Тогда останется более 8 пустых клеток. Так как пустые клетки не могут примыкать к границе ящика, они окажутся сосредоточены в центральном квадрате 6×6. Разобьем квадрат 6×6 на четыре квадрата 3×3. Один из квадратов должен содержать не менее трех пустых клеток. Но короткий перебор их потенциальных расположений показывает, что это невозможно. Противоречие. $\square$

1.2 8–9 классы

1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Население острова составляет 1000 человек и сосредоточено в 10 селах (в каждом селе не менее двух человек). Однажды каждый островитянин заявил, что все его односельчане — лжецы. Сколько лжецов живет на острове? (Два жителя *односельчане,* если они живут в одном и том же селе.)

Ответ: 990.

В одном селе не могут жить хотя бы два рыцаря, так как иначе бы рыцари солгали. Также в селе не могут все быть лжецами, поскольку тогда бы эти лжецы сказали правду. Значит, в каждом селе ровно один рыцарь, и всего рыцарей 10, а лжецов — 990. □

2. Петя поднялся по движущемуся вверх эскалатору, насчитав 75 ступенек, а затем спустился по нему же (т. е. двигаясь против направления эскалатора), насчитав 150 ступенек. Во время спуска Петя шагал втрое быстрее, чем во время подъема. Сколько ступенек на остановленном эскалаторе?

Ответ: 120.

Для удобства введем условную единицу времени, за которую Петя совершал один шаг при подъеме на эскалаторе. Все скорости будем измерять в шагах в условную единицу времени. Скорость Пети при подъеме равна 1 шаг в единицу времени, скорость при спуске — 3. Обозначим скорость эскалатора за x. Абсолютная скорость Пети составляла $1+x$ при подъеме и $3-x$ на спуске. На подъем Петя потратил 75 единиц времени, на спуск — 50 (на спуске он совершал шаги втрое быстрее). При подъеме и при спуске была пройдено одно и то же расстояние — длина эскалатора. Значит, $75 \cdot (1+x) = 50 \cdot (3-x)$, откуда $125x = 75$, $x = 0{,}6$.

Длина эскалатора составляет $75 \cdot (1+0{,}6) = 120$ шагов. Именно столько ступенек будет на остановленном эскалаторе. □

3. Про выпуклый четырехугольник $ABCD$ известно, что $AB = BC = CA = CD$, $\angle ACD = 10°$. Вокруг треугольника BCD описана окружность ω с центром O. Прямая DA пересекает окружность ω в точках D и E. Найдите величину угла EOA, ответ выразите в градусах.

Ответ: 65.

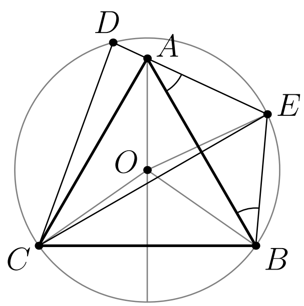


Рис. 2: к решению задачи 3.

Рис. 2. Так как треугольник ADC равнобедренный, и мы знаем угол при его вершине, углы при его основании равны $\angle DAC = \angle CDA = 85°$. Отсюда $\angle BAE = 180° - \angle DAC - \angle CAB = 35°$. Угол EBC дополняет угол EDC до $180°$ и потому равен $95°$, откуда $\angle EBA = 35°$. Следовательно, треугольник AEB равнобедренный, и прямая CE — серединнный перпендикуляр к AB. Но тогда CB — это биссектриса угла BCA, то есть $\angle BCE = 30°$, и соответствующий центральный угол $\angle BOE = 60°$.

С другой стороны, $\angle COE = 2\angle CDE = 170°$, откуда $\angle COB = 110°$.

Наконец, из симметрии треугольника ABC относительно AO легко видеть, что искомый угол EOA дополняет до $180°$ сумму угла BOE с половиной угла COB, т.е. $\angle EOA = 180° - \angle BOE - \frac{1}{2}\angle COB = 65°$. $\square$

4. Аня пишет натуральное число, а Борис заменяет одну любую цифру на цифру, отличающуюся на 1. Какое наименьшее число Аня должна была написать, чтобы в результате гарантированно получилось число, кратное 11?

Ответ: 909090909.

Согласно признаку делимости на 11, остаток числа при делении на 11 совпадает с остатком знакопеременной суммы цифр этого числа при делении на 11. Соответственно, при изменении цифры на 1 остаток при делении на 11 тоже меняется на 1. Значит, исходное число дает остаток 10 или 1 при делении на 11.

Если исходное число дает остаток 10 при делении на 11, то всякое изменение его цифр должно увеличивать остаток знакопеременной суммы цифр при делении на 11 на 1. Значит, цифры на нечетных (считая с конца) позициях можно лишь увеличить на 1, а цифры на четных позициях — только уменьшить на 1, т. е. число имеет вид $\ldots$909090. Наименьшее число такого вида, дающее остаток 10 при делении на 11 — это 9090909090.

Если исходное число дает остаток 1 при делении на 11, то, аналогично, оно имеет вид $\ldots$90909, и наименьшее подходящее под условие число — 909090909. $\square$

5. Дно ящика представляет собой таблицу 8×8. Какое наименьшее ненулевое число плиток 2×1 или 1×2 можно расположить на дне ящика так, чтобы ни одну плитку нельзя было подвинуть ни по горизонтали, ни по вертикали? Каждая плитка должна занимать ровно две клетки, не занятые другими плитками.

Ответ: 28.

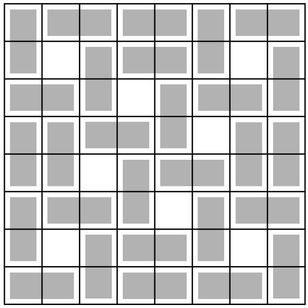
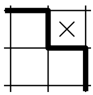


Рис. 3: к решению задачи 5.

Пример: схему расположения 28 плиток можно увидеть на рис. 3.

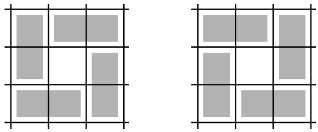
Оценка. Клетки, не покрытые плитками, назовем *пустыми.* Для начала докажем, что никакие две пустые клетки не могут быть соседними по стороне.

Предположим противное: какие-то две пустые клетки оказались соседними. Рассмотрим фигуру, образованную соседними по стороне пустыми клетками. Заметим, что фигура не может содержать вогнутых углов (рис.), так как плитку, закрывающая отмеченную крестиком клетку, можно подвинуть по вертикали, если она вертикальная, или по горизонтали, если она горизонтальная.



Если у фигуры нет вогнутых углов, то она — прямоугольник. Обозначим его размеры $a \times b$, где $a \geqslant b$. Ситуация $a \geqslant 3$ невозможна, так как хотя бы к одной из сторон прямоугольника длины a должны примыкать плитки (а не край ящика), но тогда плитку, примыкающую к некрайней клетке рассматриваемой стороны, можно задвинуть в прямоугольник. С помощью короткого перебора можно доказать, что прямоугольники 2×2 и 2×1 из пустых клеток также невозможны.

Итак, все пустые клетки изолированы. Никакая пустая клетка не может стоять у края доски, иначе одну из примыкающих к этой пустой клетке плиток можно задвинуть на эту пустую клетку. Плитки, примыкающие к пустой клетке, можно уложить всего двумя способами, показанными на рисунке.



Из этого, в частности, следует, что две пустые клетки не могут находиться в одной строке или одном столбце на расстоянии два, а также не могут являться соседними по диагонали.

Теперь мы готовы завершить оценку. Предположим, что можно обойтись менее, чем 28 плитками. Тогда останется более 8 пустых клеток. Так как пустые клетки не могут примыкать к границе ящика, они окажутся сосредоточены в центральном квадрате 6×6. Разобьем квадрат 6×6 на четыре квадрата 3×3. Один из квадратов должен содержать не менее трех пустых клеток. Но короткий перебор их потенциальных расположений показывает, что это невозможно. Противоречие. $\square$

6. На плацу в одну шеренгу выстроены 2018 солдат. Командир может приказать либо всем, стоящим на четных местах, либо всем, стоящим на нечетных местах, покинуть строй. После этого приказа оставшиеся в строю солдаты смыкаются в одну шеренгу. Сколькими способами командир может отдать серию из 8 приказов так, чтобы в строю осталось ровно 7 человек?

Ответ: 30.

Добавим в конец строя 30 воображаемых людей. Пронумеруем всех людей в строю числами от 0 до 2047. Запишем все эти номера в двоичном виде с помощью 11 цифр. Получатся последовательности от 00000000000 до 11111111111. Воображаемым солдатам соответствуют номера от 11111100010 до 11111111111 (от 2018 до 2047 в двоичной записи).

Заметим, что солдаты на четных местах имеют 1 в качестве последней цифры двоичной записи, а солдаты на нечетных местах — 0. Значит, в результате выполнения приказа в строю остаются солдаты с фиксированной последней цифрой. После выполнения следующего приказа в строю останутся солдаты с фиксированной предпоследней цифрой, и так далее.

После серии из 8 приказов в строю останутся солдаты, двоичные номера которых имею вид $\overline{xxxabcdefgh}$, где символами x обозначены цифры, принимающие произвольные значения; a, b, c, d, e, f, g, h — зафиксированные в первых восьми приказах цифры. Ясно, что солдаты, у которых $\overline{xxx} = 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110$, действительно присутствовали в изначальном строю, так как минимальный номер воображаемого солдата начинается на 111. Нас интересуют ситуации, когда солдат с номером $\overline{111abcdefgh}$ — воображаемый (в противном случае остается 8 человек). Это происходит ровно в 30 случаях: от 11111100010 до 11111111111. Итого возможно 30 нарядов из 7 человек. □

1.3 10–11 классы

1/1. При каком значении k числа $28+k$, $300+k$ и $604+k$ в указанном порядке служат квадратами трех последовательных членов некоторой возрастающей арифметической прогрессии?

Ответ: 996.

Обозначим члены арифметической прогрессии за $a-d$, a, $a+d$. Заметим, что

$$\begin{aligned}2d^2 &= (a-d)^2+(a+d)^2-2a^2 = \\ &= (28+k)+(604+k)-2\cdot(300+k) = 32\,,\end{aligned}$$

откуда $d=4$ ($d>0$, так как прогрессия возрастает).

Далее: $8a-16=a^2-(a-4)^2=(300+k)-(28+k)=272$, что дает $a=36$. Наконец, раз $a^2=300+k$, то $k=36^2-300=996$. □

1/2. При каком значении k числа $36+k$, $300+k$ и $596+k$ в указанном порядке служат квадратами трех последовательных членов некоторой возрастающей арифметической прогрессии?

Ответ: 925.

Обозначим члены арифметической прогрессии за $a-d$, a, $a+d$. Заметим, что

$$\begin{aligned}2d^2 &= (a-d)^2+(a+d)^2-2a^2 = \\ &= (36+k)+(596+k)-2\cdot(300+k) = 32\,,\end{aligned}$$

откуда $d=4$ ($d>0$, так как прогрессия возрастает).

Далее: $8a-16=a^2-(a-4)^2=(300+k)-(36+k)=264$, что дает $a=35$. Наконец, раз $a^2=300+k$, то $k=35^2-300=925$. □

1/3. При каком значении k числа $44+k$, $300+k$ и $588+k$ в указанном порядке служат квадратами трех последовательных членов некоторой возрастающей арифметической прогрессии?

Ответ: 856.

Обозначим члены арифметической прогрессии за $a-d$, a, $a+d$. Заметим, что

$$\begin{aligned}2d^2 &= (a-d)^2 + (a+d)^2 - 2a^2 = \\ &= (44+k) + (588+k) - 2\cdot(300+k) = 32\,,\end{aligned}$$

откуда $d = 4$ ($d > 0$, так как прогрессия возрастает).

Далее: $8a - 16 = a^2 - (a-4)^2 = (300+k) - (44+k) = 256$, что дает $a = 34$. Наконец, раз $a^2 = 300 + k$, то $k = 34^2 - 300 = 856$. $\square$

2/1. У Пети есть 35 одинаковых кирпичей размера $5\times8\times17$. Петя хочет построить из всех кирпичей одну башню, каждый раз добавляя сверху по одному кирпичу (каждый новый кирпич добавляет 5, 8 или 17 к высоте текущей башни). Назовем число n *построимым,* если Петя может построить башню высоты ровно n. Сколько существует построимых чисел?

Ответ: 138.

По сути, треубется найти количество разных по высоте башен, которые возможно построить из данного набора кирпичей.

Мысленно уменьшим длину, ширину и высоту каждого кирпича на 5: с $5\times8\times17$ до $0\times3\times12$. Тогда суммарная высота потенциальной башни уменьшится на $35\cdot5$, и число разных по высоте башен, составленных из новых кирпичей, будет совпадать с числом разных по высоте башен из старых. Уменьшим теперь размеры кирпичей в три раза: с $0\times3\times12$ до $0\times1\times4$. Размеры потенциальных башен уменьшатся также в три раза, и число разных по высоте башен вновь не изменится.

Таким образом, исходная задача равносильна следующей: сколько различных значений можно получить, складывая числа 0, 1, 4 в количестве 35? Заметим, что если в сумме хотя бы четыре раза встречается число 1, то набор 1, 1, 1, 1 можно заменить на набор 4, 0, 0, 0; при этой замене и сумма, и количество чисел сохранятся. Значит, можно рассматривать лишь те суммы, где число 1 встречается не более трех раз.

Если число 1 встречается 0 раз, то возможны 36 различных значений суммы: $0, 4, 8, \ldots, 4\cdot35$.

Если число 1 встречается 1 раз, то возможны 35 различных значений суммы: $1, 1+4, 1+8, \ldots, 1+4\cdot34$.

Если число 1 встречается 2 раза, то возможны 34 различные значения суммы: $2, 2+4, 2+8, \ldots, 2+4\cdot33$.

Если число 1 встречается 3 раза, то возможны 33 различные значения суммы: $3, 3 + 4, 3 + 8, \ldots, 3 + 4 \cdot 32$.

Числа из разных списков разные, так как дают разные остатки при делении на 4.

Итого $36+35+34+33 = 138$ возможных значений высоты башни. $\square$

2/2. У Васи есть 40 одинаковых кирпичей размера $7\times9\times15$. Вася хочет построить из всех кирпичей одну башню, каждый раз добавляя сверху по одному кирпичу (каждый новый кирпич добавляет 7, 9 или 15 к высоте текущей башни). Назовем число n *построимым,* если Вася может построить башню высоты ровно n. Сколько существует построимых чисел?

Ответ: 158.

По сути, треубется найти количество разных по высоте башен, которые возможно построить из данного набора кирпичей.

Мысленно уменьшим длину, ширину и высоту каждого кирпича на 7: с $7\times9\times15$ до $0\times2\times8$. Тогда суммарная высота потенциальной башни уменьшится на $40 \cdot 7$, и число разных по высоте башен, составленных из новых кирпичей, будет совпадать с числом разных по высоте башен из старых. Уменьшим теперь размеры кирпичей в два раза: с $0\times2\times8$ до $0 \times 1 \times 4$. Размеры потенциальных башен уменьшатся также в два раза, и число разных по высоте башен вновь не изменится.

Таким образом, исходная задача равносильна следующей: сколько различных значений можно получить, складывая числа 0, 1, 4 в количестве 40? Заметим, что если в сумме хотя бы четыре раза встречается число 1, то набор 1, 1, 1, 1 можно заменить на набор 4, 0, 0, 0; при этой замене и сумма, и количество чисел сохранятся. Значит, можно рассматривать лишь те суммы, где число 1 встречается не более трех раз.

Если число 1 встречается 0 раз, то возможно 41 различное значение суммы: $0, 4, 8, \ldots, 4 \cdot 40$.

Если число 1 встречается 1 раз, то возможны 40 различных значений суммы: $1, 1 + 4, 1 + 8, \ldots, 1 + 4 \cdot 39$.

Если число 1 встречается 2 раза, то возможны 39 различных значений суммы: $2, 2 + 4, 2 + 8, \ldots, 2 + 4 \cdot 38$.

Если число 1 встречается 3 раза, то возможны 38 различных значений суммы: $3, 3 + 4, 3 + 8, \ldots, 3 + 4 \cdot 37$.

Числа из разных списков разные, так как дают разные остатки при делении на 4.

Итого $41+40+39+38 = 158$ возможных значений высоты башни. $\square$

2/3. У Толи есть 30 одинаковых кирпичей размера $7 \times 11 \times 23$. Толя хочет построить из всех кирпичей одну башню, каждый раз добавляя сверху по одному кирпичу (каждый новый кирпич добавляет 7, 11 или 23 к высоте текущей башни). Назовем число n *построимым,* если Толя может построить башню высоты ровно n. Сколько существует построимых чисел?

Ответ: 118.

По сути, требуется найти количество разных по высоте башен, которые возможно построить из данного набора кирпичей.

Мысленно уменьшим длину, ширину и высоту каждого кирпича на 7: с $7\times11\times23$ до $0\times4\times16$. Тогда суммарная высота потенциальной башни уменьшится на $30 \cdot 7$, и число разных по высоте башен, составленных из новых кирпичей, будет совпадать с числом разных по высоте башен из старых. Уменьшим теперь размеры кирпичей в четыре раза: с $0 \times 4 \times 16$ до $0 \times 1 \times 4$. Размеры потенциальных башен уменьшатся также в четыре раза, и число разных по высоте башен вновь не изменится.

Таким образом, исходная задача равносильна следующей: сколько различных значений можно получить, складывая числа 0, 1, 4 в количестве 30? Заметим, что если в сумме хотя бы четыре раза встречается число 1, то набор 1, 1, 1, 1 можно заменить на набор 4, 0, 0, 0; при этой замене и сумма, и количество чисел сохранятся. Значит, можно рассматривать лишь те суммы, где число 1 встречается не более трех раз.

Если число 1 встречается 0 раз, то возможно 31 различное значение суммы: $0, 4, 8, \ldots, 4 \cdot 30$.

Если число 1 встречается 1 раз, то возможны 30 различных значений суммы: $1, 1 + 4, 1 + 8, \ldots, 1 + 4 \cdot 29$.

Если число 1 встречается 2 раза, то возможны 29 различных значений суммы: $2, 2 + 4, 2 + 8, \ldots, 2 + 4 \cdot 28$.

Если число 1 встречается 3 раза, то возможны 28 различных значений суммы: $3, 3 + 4, 3 + 8, \ldots, 3 + 4 \cdot 27$.

Числа из разных списков разные, так как дают разные остатки при делении на 4.

Итого $31+30+29+28=118$ возможных значений высоты башни. $\square$

3/1. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $\angle A = 90°$, $\angle D = 75°$. Из вершины A опущен перпендикуляр AH на боковую сторону CD, причем основание H перпендикуляра лежит на отрезке CD. Оказалось, что $DH = BC$, $AH + AB = 8$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

Ответ: 8.

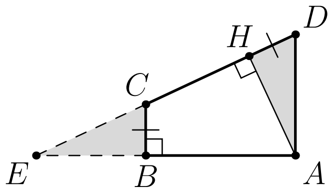


Рис. 4: к решению задачи 3/1.

Рис. 4. Обозначим точку пересечения прямых AB и CD за E. Прямоугольные треугольники EBC и AHD равны по катету и острому углу, а значит и их площади равны. Но тогда площадь трапеции $ABCD$ равна площади треугольника EAH. Угол EAH, как несложно посчитать, равен $75°$, длина гипотенузы AE равна $AB+BE = AH+AB = 8$. Длины катетов AH и HE вычисляются как $AE \cdot \cos 75°$ и $AE \cdot \sin 75°$. Теперь мы готовы вычислить площадь.

$$S_{ABCD} = S_{EAB} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot HE = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot \cos(75°) \cdot AE \cdot \sin(75°) =$$
$$= AE^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \cos(75°) \cdot \sin(75°) =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot AE^2 \cdot \sin(150°) = \frac{1}{8} \cdot AE^2 = 8\,. \quad \square$$

3/2. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $\angle A = 90°$, $\angle D = 75°$. Из вершины A опущен перпендикуляр AH на боковую сторону CD, причем основание H перпендикуляра лежит на отрезке CD. Оказалось, что $DH = BC$, $AH + AB = 12$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

Ответ: 18.

Рис. 5. Обозначим точку пересечения прямых AB и CD за E. Прямоугольные треугольники EBC и AHD равны по катету и острому углу, а значит и их площади равны. Но тогда площадь трапеции $ABCD$ равна площади треугольника EAH. Угол EAH, как несложно посчитать, равен $75°$, длина гипотенузы AE равна $AB+BE = AH+AB = 8$.

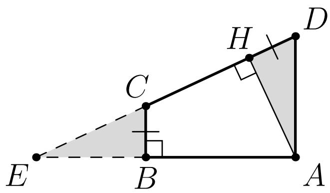


Рис. 5: к решению задачи 3/2.

Длины катетов AH и HE вычисляются как $AE \cdot \cos 75°$ и $AE \cdot \sin 75°$. Теперь мы готовы вычислить площадь.

$$S_{ABCD} = S_{EAB} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot HE = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot \cos(75°) \cdot AE \cdot \sin(75°) =$$
$$= AE^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \cos(75°) \cdot \sin(75°) =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot AE^2 \cdot \sin(150°) = \frac{1}{8} \cdot AE^2 = 18\,. \quad \square$$

3/3. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $\angle A = 90°$, $\angle D = 75°$. Из вершины A опущен перпендикуляр AH на боковую сторону CD, причем основание H перпендикуляра лежит на отрезке CD. Оказалось, что $DH = BC$, $AH + AB = 16$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

Ответ: 32.

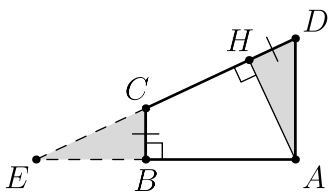


Рис. 6: к решению задачи 3/3.

Рис. 4. Обозначим точку пересечения прямых AB и CD за E. Прямоугольные треугольники EBC и AHD равны по катету и острому углу, а значит и их площади равны. Но тогда площадь трапеции $ABCD$ равна площади треугольника EAH. Угол EAH, как несложно посчитать, равен $75°$, длина гипотенузы AE равна $AB+BE = AH+AB = 8$. Длины катетов AH и HE вычисляются как $AE \cdot \cos 75°$ и $AE \cdot \sin 75°$.

Теперь мы готовы вычислить площадь.

$$S_{ABCD} = S_{EAB} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot HE = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot \cos(75^\circ) \cdot AE \cdot \sin(75^\circ) =$$
$$= AE^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \cos(75^\circ) \cdot \sin(75^\circ) =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot AE^2 \cdot \sin(150^\circ) = \frac{1}{8} \cdot AE^2 = 32\,. \quad \square$$

4/1. Натуральное число назовем *волшебным,* если все его цифры ненулевые и при последовательном удалении старшего разряда из текущего числа на каждом шаге получается делитель этого числа. Например, число 312 — волшебное, так как 312 делится на 12 и 12 делится на 2. Известно, что существует ровно три волшебных пятизначных числа. Найдите из этих трех чисел среднее по величине.

Ответ: 91125.

Найдем все пятизначные волшебные числа. Пусть $\overline{abcde}$ — волшебное пятизначное число; в частности, $\overline{abcde}$ делится на $\overline{bcde}$. Но тогда и $10^4 a = \overline{abcde} - \overline{bcde}$ делится на $\overline{bcde}$.

Докажем, что $e = 5$. Предположим противное: $e \neq 5$. Так как $e \neq 0$ по условию, то $\overline{bcde}$ не делится на 5. Но тогда $2^4 a$ должно делится на $\overline{bcde}$. Это невозможно, так как $2^4 a < 16 \cdot 10 = 160 < 1000 \leqslant \overline{bcde}$. Противоречие.

Раз $e = 5$, то $\overline{bcde}$ — нечетное число, и $5^4 a$ кратно $\overline{bcde}$. Переберем всевозможные нечетные четырехзначные делители чисел вида $625a$, где a — цифра.

Если $a = 1, 2, 4, 8$, то таких делителей у $625a$ нет.

Если $a = 3, 6$, то подходит только 1875.

Если $a = 5$, то подходит только 3125.

Если $a = 7$, то подходит только 4375.

Если $a = 9$, то подходят 1125, 1875, 5625.

Волшебными числами являются лишь 53125, 91125, 95625. $\square$

4/2. Натуральное число назовем *волшебным,* если все его цифры ненулевые и при последовательном удалении старшего разряда из текущего числа на каждом шаге получается делитель этого числа. Например, число 312 — волшебное, так как 312 делится на 12 и 12 делится на 2. Известно, что существует ровно три волшебных пятизначных числа. Найдите из этих трех чисел наибольшее.

Ответ: 95625.

Найдем все пятизначные волшебные числа. Пусть $\overline{abcde}$ — волшебное пятизначное число; в частности, $\overline{abcde}$ делится на $\overline{bcde}$. Но тогда и $10^4 a = \overline{abcde} - \overline{bcde}$ делится на $\overline{bcde}$.

Докажем, что $e = 5$. Предположим противное: $e \neq 5$. Так как $e \neq 0$ по условию, то $\overline{bcde}$ не делится на 5. Но тогда $2^4 a$ должно делится на $\overline{bcde}$. Это невозможно, так как $2^4 a < 16 \cdot 10 = 160 < 1000 \leqslant \overline{bcde}$. Противоречие.

Раз $e = 5$, то $\overline{bcde}$ — нечетное число, и $5^4 a$ кратно $\overline{bcde}$. Переберем всевозможные нечетные четырехзначные делители чисел вида $625a$, где a — цифра.

Если $a = 1, 2, 4, 8$, то таких делителей у $625a$ нет.

Если $a = 3, 6$, то подходит только 1875.

Если $a = 5$, то подходит только 3125.

Если $a = 7$, то подходит только 4375.

Если $a = 9$, то подходят 1125, 1875, 5625.

Волшебными числами являются лишь 53125, 91125, 95625. □

4/3. Натуральное число назовем *волшебным,* если все его цифры ненулевые и при последовательном удалении старшего разряда из текущего числа на каждом шаге получается делитель этого числа. Например, число 312 — волшебное, так как 312 делится на 12 и 12 делится на 2. Известно, что существует ровно три волшебных пятизначных числа. Найдите из этих трех чисел наименьшее.

Ответ: 53125.

Найдем все пятизначные волшебные числа. Пусть $\overline{abcde}$ — волшебное пятизначное число; в частности, $\overline{abcde}$ делится на $\overline{bcde}$. Но тогда и $10^4 a = \overline{abcde} - \overline{bcde}$ делится на $\overline{bcde}$.

Докажем, что $e = 5$. Предположим противное: $e \neq 5$. Так как $e \neq 0$ по условию, то $\overline{bcde}$ не делится на 5. Но тогда $2^4 a$ должно делится на $\overline{bcde}$. Это невозможно, так как $2^4 a < 16 \cdot 10 = 160 < 1000 \leqslant \overline{bcde}$. Противоречие.

Раз $e = 5$, то $\overline{bcde}$ — нечетное число, и $5^4 a$ кратно $\overline{bcde}$. Переберем всевозможные нечетные четырехзначные делители чисел вида $625a$, где a — цифра.

Если $a = 1, 2, 4, 8$, то таких делителей у $625a$ нет.

Если $a = 3, 6$, то подходит только 1875.

Если $a = 5$, то подходит только 3125.

Если $a = 7$, то подходит только 4375.

Если $a = 9$, то подходят 1125, 1875, 5625.

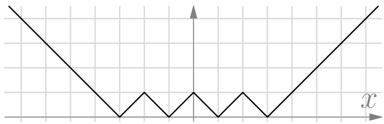
Волшебными числами являются лишь 53125, 91125, 95625. □

5/1. Множество решений уравнения $x^2 + y^2 = 1$ делит координатную плоскость на две части (всё, что внутри заданной этим уравнением окружности, и всё, что вне). А на сколько частей делит координатную плоскость множество решений уравнения

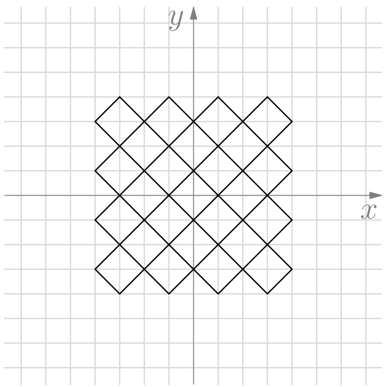
$$\Big|\big||x| - 2\big| - 1\Big| + \Big|\big||y| - 2\big| - 1\Big| = 1\,?$$

Ответ: 26.

Для начала построим график функции $f(x) = \Big|\big||x| - 2\big| - 1\Big|$. Это легко сделать, последовательно строя графики функций $|x|$, $|x| - 2$, $\big||x| - 2\big|$, $\big||x| - 2\big| - 1$, $f(x)$ (каждый следующий график отличается от предыдущего либо сдвигом вниз, либо отражением частей графика относительно оси Ox). График функции $f(x)$ нарисован ниже.



Зная вид графика функции $f(x)$, легко нарисовать на плоскости множество точек, удовлетворяющих $f(x) + f(y) = 1$.



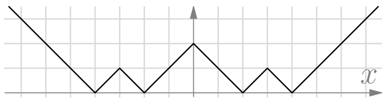
Как видно из картинки, областей получается ровно 26. □

5/2. Множество решений уравнения $x^2 + y^2 = 1$ делит координатную плоскость на две части (всё, что внутри заданной этим уравнением окружности, и всё, что вне). А на сколько частей делит координатную плоскость множество решений уравнения

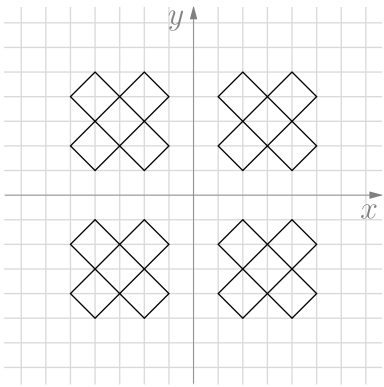
$$\Big|\big||x|-3\big|-1\Big| + \Big|\big||y|-3\big|-1\Big| = 1\,?$$

Ответ: 21.

Для начала построим график функции $f(x) = \Big|\big||x|-3\big|-1\Big|$. Это легко сделать, последовательно строя графики функций $|x|$, $|x|-3$, $\big||x|-3\big|$, $\big||x|-3\big|-1$, $f(x)$ (каждый следующий график отличается от предыдущего либо сдвигом вниз, либо отражением частей графика относительно оси Ox). График функции $f(x)$ нарисован ниже.



Зная вид графика функции $f(x)$, легко нарисовать на плоскости множество точек, удовлетворяющих $f(x) + f(y) = 1$.



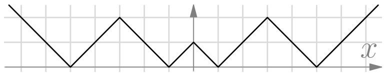
Как видно из картинки, областей получается ровно 21. □

5/3. Множество решений уравнения $x^2 + y^2 = 1$ делит координатную плоскость на две части (всё, что внутри заданной этим уравнением окружности, и всё, что вне). А на сколько частей делит координатную плоскость множество решений уравнения

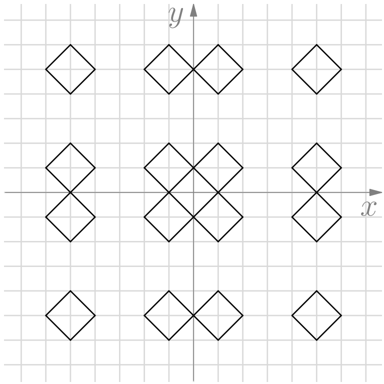
$$\Big|\big||x|-3\big|-2\Big| + \Big|\big||y|-3\big|-2\Big| = 1\,?$$

Ответ: 18.

Для начала построим график функции $f(x) = \Big|\big||x| - 3\big| - 2\Big|$. Это легко сделать, последовательно строя графики функций $|x|$, $|x| - 3$, $\big||x| - 3\big|$, $\big||x| - 3\big| - 2$, $f(x)$ (каждый следующий график отличается от предыдущего либо сдвигом вниз, либо отражением частей графика относительно оси Ox). График функции $f(x)$ нарисован ниже.



Зная вид графика функции $f(x)$, легко нарисовать на плоскости множество точек, удовлетворяющих $f(x) + f(y) = 1$.



Как видно из картинки, областей получается ровно 18. □

6/1. На плоскости отмечены 2500 различных точек, каждая из которых красного или синего цвета. Для каждой синей точки нарисована окружность радиуса 1 с центром в этой точке. Оказалось, что на каждой нарисованной окружности лежат ровно две красные точки. Какое максимальное число отмеченных точек синего цвета могло быть?

Ответ: 2450.

Обозначим число красных точек за k. Окружности из условия задачи будем называть *синими* окружностями. Нарисуем новые *красные* окружности радиуса 1 с центром в каждой из красных точек. Заметим, что красная точка лежит на синей окружности тогда и только тогда, когда соответствующая синяя точка лежит на соответствующей красной окружности. По условию задачи на каждой синей окружности лежат ровно две красные точки. Это условие равносильно тому, что через каждую синюю точку проходят ровно две красные окружности, т. е. каждая синяя точка есть точка пересечения двух красных окружностей.

Две различные окружности на плоскости имеют не более двух общих точек, всего пар красных точек ровно $\frac{k\cdot(k-1)}{2}$, и поэтому число попарных пересечений красных окружностей не превосходит $k(k-1)$. Значит, синих точек не более чем $k(k-1)$, и тогда всего точек не более чем $k(k-1)+k=k^2$. Но всего точек 2500; следовательно, $k \geqslant 50$.

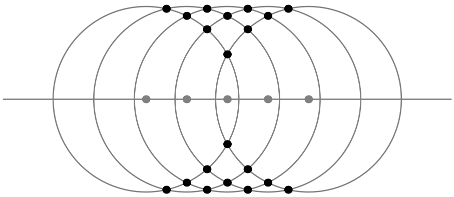


Рис. 7: к решению задачи 6/1, пример для $k=5$.

Ситуации, когда $k=50$, легко добиться: достаточно расположить 50 красных точек на одной прямой на близком расстоянии, нарисовать с центрами в этих точках окружности радиуса 1 и в точках пересечения этих окружностей расположить синие точки. Очевидно, что никакие три окружности не пересекутся в одной точке. □

6/2. На плоскости отмечены 3600 различных точек, каждая из которых красного или синего цвета. Для каждой синей точки нарисована окружность радиуса 1 с центром в этой точке. Оказалось, что на каждой нарисованной окружности лежат ровно две красные точки. Какое максимальное число отмеченных точек синего цвета могло быть?

Ответ: 3540.

Обозначим число красных точек за k. Окружности из условия задачи будем называть *синими* окружностями. Нарисуем новые *красные* окружности радиуса 1 с центром в каждой из красных точек. Заметим, что красная точка лежит на синей окружности тогда и только тогда, когда соответствующая синяя точках лежит на соответствующей красной окружности. По условию задачи на каждой синей окружности лежат ровно две красные точки. Это условие равносильно тому, что через каждую синюю точку проходят ровно две красные окружности, т. е. каждая синяя точка есть точка пересечения двух красных окружностей.

Две различные окружности на плоскости имеют не более двух общих точек, всего пар красных точек ровно $\frac{k\cdot(k-1)}{2}$, и поэтому число попарных пересечений красных окружностей не превосходит $k(k-1)$. Значит, синих точек не более чем $k(k-1)$, и тогда всего точек не более чем $k(k-1)+k=k^2$. Но всего точек 3600; следовательно, $k \geqslant 60$.

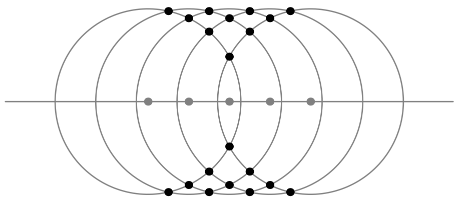


Рис. 8: к решению задачи 6/2, пример для $k = 5$.

Ситуации, когда $k = 60$, легко добиться: достаточно расположить 60 красных точек на одной прямой на близком расстоянии, нарисовать с центрами в этих точках окружности радиуса 1 и в точках пересечения этих окружностей расположить синие точки. Очевидно, что никакие три окружности не пересекутся в одной точке. $\square$

6/3. На плоскости отмечены 4900 различных точек, каждая из которых красного или синего цвета. Для каждой синей точки нарисована окружность радиуса 1 с центром в этой точке. Оказалось, что на каждой нарисованной окружности лежат ровно две красные точки. Какое максимальное число отмеченных точек синего цвета могло быть?

Ответ: 4830.

Обозначим число красных точек за k. Окружности из условия задачи будем называть *синими* окружностями. Нарисуем новые *красные* окружности радиуса 1 с центром в каждой из красных точек. Заметим, что красная точка лежит на синей окружности тогда и только тогда, когда соответствующая синяя точках лежит на соответствующей красной окружности. По условию задачи на каждой синей окружности лежат ровно две красные точки. Это условие равносильно тому, что через каждую синюю точку проходят ровно две красные окружности, т. е. каждая синяя точка есть точка пересечения двух красных окружностей.

Две различные окружности на плоскости имеют не более двух общих точек, всего пар красных точек ровно $\frac{k\cdot(k-1)}{2}$, и поэтому число попарных пересечений красных окружностей не превосходит $k(k-1)$. Значит, синих точек не более чем $k(k-1)$, и тогда всего точек не более чем $k(k-1) + k = k^2$. Но всего точек 4900; следовательно, $k \geqslant 70$.

Ситуации, когда $k = 70$, легко добиться: достаточно расположить 70 красных точек на одной прямой на близком расстоянии, нарисовать с центрами в этих точках окружности радиуса 1 и в точках пересечения этих окружностей расположить синие точки. Очевидно, что

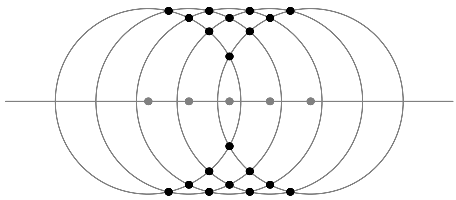


Рис. 9: к решению задачи 6/3, пример для $k = 5$.

никакие три окружности не пересекутся в одной точке. $\square$