8 класс

1. На плоскости нарисованы перекрывающиеся квадрат и круг. Вместе они занимают площадь $2018\,\text{см}^2$. Площадь пересечения составляет $137\,\text{см}^2$. Площадь круга равна $1371\,\text{см}^2$. Чему равен периметр квадрата?

Ответ: 112 см.

Площадь части круга вне квадрата составляет $1371 - 137 = 1234\,\text{см}^2$, следовательно, площадь квадрата можно выразить формулой $2018 - 1234 = 784\,\text{см}^2$. В итоге заключаем, что длина стороны квадрата равна $\sqrt{784} = 28\,\text{см}$, а его периметр — 112 см. □

Критерии

+ Верное решение — 7 баллов.

± Арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений — 5 баллов.

2. Перед Васей лежит стопка из 15 красных, 15 синих и 15 желтых карточек. Васе требуется выбрать 15 из всех 45 карточек так, чтобы заработать максимальное количество очков. Очки при этом начисляются следующим образом. За каждую красную карточку Вася получает одно очко. За каждую синюю карточку Вася получает количество очков, равное удвоенному количеству выбранных красных карточек, а за каждую желтую карточку Вася получает количество очков, равное утроенному количеству выбранных синих карточек. Какое максимальное количество очков может получить Вася?

Ответ: 168.

Обозначим количества взятых Васей красных, синих и желтых карточек символами К, С и Ж соответственно. Число очков, которое получит Вася, выражается формулой

$$\text{К} + 2\cdot\text{К}\cdot\text{С} + 3\cdot\text{С}\cdot\text{Ж} = \text{К}\cdot(2\text{С}+1) + \text{Ж}\cdot 3\text{С}\,.$$

Если $\text{С} = 0$, то Вася получит очки только за красные карточки, то есть не более 15.

Если же $\text{С} \geqslant 1$, то $2\text{С}+1 \leqslant 3\text{С}$, и, как видно из формулы выше, после замены всех красных карточек на желтые количество очков, набранных Васей, не уменьшится. Тем самым можно считать, что Вася взял только желтые и синие карточки, и тогда $\text{С} + \text{Ж} = 15$. Общая сумма набранных очков вычисляется по формуле

$$3\cdot\text{С}\cdot(15-\text{С})\,.$$

Рассмотрим параболу $f(x) = 3x(15-x)$. Максимальное значение в целочисленной точке достигается, когда эта точка ближе всех к вершине параболы, то есть при $x = 7$ или $x = 8$. Количество очков при этом равно $3\cdot 7\cdot 8 = 168$. □

Критерии

+ Верное решение — 7 баллов.

± Решение сведено к нахождению максимума функции $3x(15-x)$ — 5 баллов.

∓ Доказано, что (в случае наибольшего количества очков) можно все красные карточки заменить на желтые — 3 балла.

-. Верный ответ без обоснования максимальности (или с неверным обоснованием) — 1 балл.

− Верный ответ без обоснования (или с неверным обоснованием) — 0 баллов.

3. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $p^2 + pq + q^2$ является точным квадратом.

Ответ: $(3,5)$ и $(5,3)$.

Равенство $p^2 + pq + q^2 = a^2$, подразумеваемое в условии задачи, перепишем следующим образом

$$pq = (p+q)^2 - a^2 = (p+q-a)(p+q+a)\,.$$

Поскольку сомножитель $p+q+a$ в правой части больше и чем p, и чем q, то, используя простоту чисел p и q, выводим, что $p+q-a=1$ и $p+q+a=pq$. Складывая полученные равенства, заключаем, что $2(p+q)=pq+1$. Последнее уравнение переписывается в виде

$$(p-2)(q-2)=3\,,$$

откуда получаем две пары решений: $(p,q)=(3,5)$ и $(p,q)=(5,3)$. □

Критерии

+ Верное решение — 7 баллов.

+. Арифметическая ошибка в финале решения, не влияющая на его суть, но, возможно, искажающая ответ — 6 баллов.

± Задача сведена к решению уравнения $pq-2(p+q)+1=0$ или равносильного, но дальнейших продвижений нет — 4 балла.

∓ Условие переписано в виде $pq=(p+q-a)(p+q+a)$, а дальнейших продвижений нет — 2 балла.

−. Верный ответ без обоснования (или с неверным обоснованием) — 1 балл.

Не проверено, что ответы подходят — баллы не снижаются.

Выписана только одна пара чисел вместо двух — баллы не снижаются.

4. В треугольнике ABC на стороне AC выбрана точка D, а на стороне BC точка E так, что выполняются соотношения $CD=AB$, $BE=BD$, $AB\cdot AC=BC^2$. Найдите $\angle DEA$, если известно, что $\angle DBC=40°$.

Ответ: $30°$.

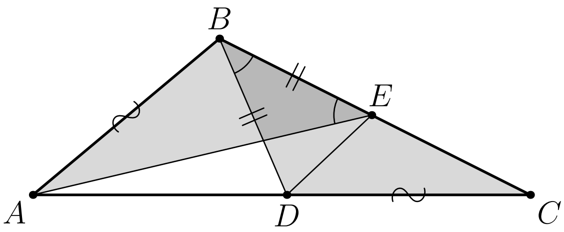

Рис. 4: к решению задачи 4.

Рис. 4. Рассмотрим треугольники BCD и ACB. У них общий угол C и верно соотношение $BC/DC=BC/BA=AC/BC$. Следовательно, треугольники подобны, и $\angle ABC=\angle BDC$. Теперь обратимся к треугольникам BDC и EBA. Как мы только что проверили, в них есть равные углы; более того, по условию в них есть пары равных сторон $BE=DB$ и $BA=DC$. Значит, треугольники равны, и $\angle BEA=\angle DBC=40°$. При этом из равнобедренности треугольника BED следует равенство $\angle BED=(180°-40°)/2=70°$. Искомый угол DEA находим по формуле

$$\angle DEA=\angle BED-\angle BEA=70°-40°=30°\,. \quad \square$$

Критерии

+ Верное решение — 7 баллов.

−. Указано на подобие треугольников ABC и BDC — 1 балл.

5. В нижней строке прямоугольника 2×2018 размещены 2018 фишек, занумерованных числами $1,2,\ldots,2018$ слева направо. За одну операцию разрешается передвинуть любую фишку в соседнюю по стороне пустую клетку. Какое наименьшее количество операций требуется для того, чтобы разместить фишки в нижней строке в обратном порядке?

Ответ: $2\cdot2017+2\cdot1009^2=2040196$.

Оценка. Заметим, что в любой паре фишек есть как минимум одна, которая поднимается в верхнюю строку, иначе они никак не смогли бы поменяться местами. Поднявшись в верхнюю строку, фишка должна когда-то спуститься обратно. Таким образом, есть как минимум $2 \cdot 2017$ вертикальных ходов. Далее, каждая из фишек с номерами k и $2019 - k$ ($k = 1, 2, \ldots, 1009$) должна совершить как минимум $(2019 - 2k)$ горизонтальных перемещений. Таким образом, количество операций должно быть не меньше чем

$$2 \cdot 2017 + 2(2017 + 2015 + \ldots + 1) = 2 \cdot 2017 + 2 \cdot 1009^2 = 2040196\,.$$

Пример. Для того чтобы справиться за указанное количество операций можно действовать, например, следующим образом. С фишками с номерами от 1 до 1009 проделываем по-очереди следующие операции: поднимаем в верхнюю строку и задвигаем в крайне правое из возможных положений. Далее, фишки с номерами от 1010 до 2017 двигаем по-очереди налево до позиций, которые они должны занять в окончательной расстановке и сдвигаем их наверх. После этого передвигаем фишку с номером 2018 в крайнее левое положение в нижней строке. После чего все фишки с 1 по 2017 сдвигаем вниз. В результате, все фишки кроме 2018 сдвигались один раз наверх и один раз вниз. Кроме того, все фишки по горизонтали пропутешествовали наименьшее возможное количество ходов. Это соответствует приведенной выше оценке. □

Критерии

- $+$ Верное решение — 7 баллов.
- $+.$ В логически верном решении из-за арифметических ошибок получился неправильный ответ — 6 баллов.
- $\pm$ Приведен любой верный *пример* перестановки фишек за минимальное количество ходов, но оценки нет — 3 балла.
- $\mp$ Доказана нижняя *оценка* на количество ходов, но нет алгоритма, переставляющего фишки за указанное число ходов — 3 балла.
- $-.$ Только верный ответ и больше ничего — 1 балл.
- $-.$ Замечено, что для любых двух фишек одна из них должна была сделать вертикальных ход, но оценка на число ходов не получена — 1 балл. Этот балл может суммироваться с баллами за пример или за ответ.