7 класс

1. Незнайка, доктор Пилюлькин, Кнопочка, Винтик и Знайка участвовали в математическом конкурсе. Каждую задачу конкурса решили ровно четверо из них. Знайка решил строго больше каждого из остальных — 10 задач, а Незнайка решил строго меньше каждого остальных — 6 задач. Сколько всего задач было в математическом конкурсе?

Ответ: 10.

Каждый из доктора Пилюлькина, Кнопочки и Винтика по условию решил от 7 до 9 задач. Поэтому суммарное количество решенных задач находится от $10+6+3\cdot 7 = 37$ до $10+6+3\cdot 9 = 43$. Заметим, что это количество должно быть равно учетверенному числу задач. Среди чисел от 37 до 43 только одно делится на 4 — это число 40. Следовательно, суммарное количество решенных задач равно 40, а задач всего было 10. □

Критерии

+ Верное решение — 7 баллов.

∓ Верный ответ без пояснений (или с неверными пояснениями) — 2 балла.

2. Сколькими способами можно вставить несколько знаков «+» между цифрами в числе 111 111 111 111 (12 единиц) так, чтобы результат делился на 30?

См. решение и критерии задачи 6.3. □

3. На сторонах AB, BC треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно так, что $AY = AB$ и $CX = CB$. Прямая, проходящая через вершину A параллельно стороне BC, пересекает прямую, проходящую через вершину C параллельно стороне AB, в точке D. Докажите, что $DX = DY$.

Заметим, что $\angle BAC = \angle ACD$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AC; аналогично $\angle BCA = \angle CAD$. Получаем, что треугольники ABC и CDA равны по второму признаку.

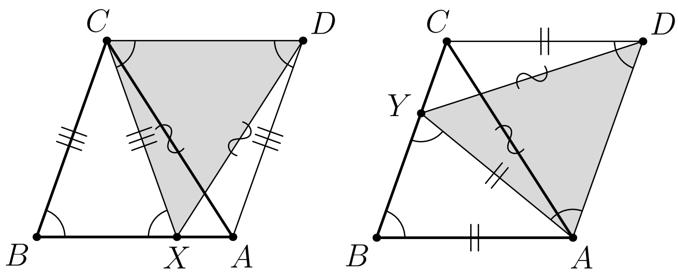

Рис. 3: к решению задачи 3.

Далее, последовательно используя равенство треугольников CDA и ABC, равнобедренность треугольника XCB и параллельность прямых AB и CD, пишем $\angle CDA = \angle ABC = \angle BXC = \angle XCD$. Треугольники ADC и XCD оказываются равны по первому признаку, откуда $DX = AC$ (рис. 3). Аналогично доказывается, что $DY = AC$. Значит, $DX = DY$. □

Критерии

+ Полное верное решение — 7 баллов.

4. Все натуральные числа раскрашены в три цвета. Докажите, что найдутся два числа одного цвета, разность между которыми является квадратом натурального числа.

Предположим противное: пусть любые два числа, разность между которыми является точным квадратом, покрашены в разный цвет. Для некоторого натурального числа x рассмотрим числа x, $x+9$, $x+16$, $x+25$. У чисел x, $x+9$ и $x+25$ все три попарные разности являются точными квадратами, следовательно они покрашены в три различных цвета. Аналогично получаем, что в тройке x, $x+16$ и $x+25$ также представлены все три цвета. Следовательно, числа $x+9$ и $x+16$ обязательно имеют одинаковый цвет. Но поскольку в качестве x можно рассматривать любое натуральное число, заключаем, что любые два числа, большие 10 и отличающиеся на 7, покрашены в один цвет. Но тогда покрашены в один цвет и любые два достаточно больших числа с разностью 49, что противоречит исходному предположению.

Замечание. Вместо чисел 9, 16 и 25 можно было выбрать любые три квадрата a^2, b^2 и c^2 такие, что $a^2+b^2=c^2$. Например, годятся 25, 144 и 169 или 36, 64 и 100. $\square$

Критерии

$+$ Верное решение — 7 баллов.

$\mp$ Доказано, что любые достаточно большие числа числа на фиксированном расстоянии (к примеру, 7) раскрашены в один и тот же цвет, а дальнейших продвижений нет — 3 балла.

$-.$ Идея использования пифагоровой тройки ($a^2+b^2=c^2$), не доведенная до конца — 1 балл.

5. На столе лежат 2018 игральных карт (2018 стопок по одной карте в каждой). Петька хочет сложить их в одну колоду из 2018 карт за 2017 операций. Каждая операция состоит в том, что две стопки соединяются в одну. При этом, когда Петька соединяет стопки из a и b карт, Василий Иванович платит Петьке $a \cdot b$ рублей. Какую максимальную сумму может заработать Петька, совершив все 2017 операций?

Ответ: $\dfrac{2017\cdot 2018}{2}=2035153$.

Будем мысленно связывать карточки в одной стопке невидимыми нитями каждую с каждой. Тогда операция соединения двух стопок с a и b картами добавляет как раз $a\cdot b$ нитей. В итоге каждая карта будет связана нитью с каждой и количество нитей не будет зависеть от способа проведения операций и окажется равным $\dfrac{2017\cdot 2018}{2}$. Именно столько рублей и заработает Петька.

Другое решение. Заметим, что при объединении стопок из a и b карт мы зарабатываем в точности $\frac{1}{2}\big((a+b)^2-a^2-b^2\big)$ рублей; следовательно, конечная сумма, которую мы заработаем, равна в точности

$$\frac{1}{2}(2018^2 \underbrace{-1^2-1^2-\ldots-1^2}_{2018\text{ раз}})=\frac{1}{2}(2018^2-2018)\,. \quad \square$$

Критерии

$+$ Верное решение — 7 баллов.

$+.$ В логически верном решении ответ представлен в виде суммы с многоточием — снимается не менее 1 балла. Например, ответ в виде $1+2+\ldots+2017$ — 6 баллов.

$\pm$ Доказано, что ответ не зависит от способа проведения операций — не менее 5 баллов.

$-.$ Верный ответ без обоснования или с неверным образованием — 1 балл.

Пример неверного обоснования: в работе вычислена сумма для конкретного способа действий, но не доказано, что именно при этом способе действий достигается максимум суммы (и не доказано, что сумма на самом деле не зависит от порядка операций).