11 класс

1. Найдите все вещественные числа x, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{2}{5}\,,$$

где через $[x]$ обозначена целая часть числа x (то есть наибольшее целое число, не превосходящее x), а $\{x\} = x - [x]$.

Ответ: $x = 2\frac{7}{20}, 3\frac{1}{10}, 1\frac{14}{15}$.

Ясно, что $x \geqslant 1$, так как иначе левая часть уравнения отрицательна или не определена.

Обозначим $[x]$ через m; тогда $[2x] = 2m$, если $\{x\} \in [0, 1/2)$, и $[2x] = 2m + 1$, если $\{x\} \in [1/2, 1)$.

В первом случае получаем, что

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{2}{5} \in \left[\frac{2}{5}, \frac{9}{10}\right)\,,$$

откуда $\frac{1}{m} \in \left[\frac{4}{15}, \frac{3}{5}\right)$, $m \in \left(\frac{5}{3}, \frac{15}{4}\right]$, то есть $m \in \{2, 3\}$, что приводит к решениям $x = 2\frac{7}{20}, 3\frac{1}{10}$.

Во втором случае получаем условие

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{2m+1} = \frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{2}{5} \in \left[\frac{9}{10}, \frac{7}{5}\right)\,,$$

которому удовлетворяет только $m = 1$, так при $m \geqslant 2$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{2m+1} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10} < \frac{9}{10}\,.$$

Значение $m = 1$ приводит нас к последнему решению $x = 1\frac{14}{15}$. □

Критерии

$+$ Верное решение — 7 баллов.

$+.$ В логически верном решении из-за арифметических ошибок корни найдены неправильно, потерян один из корней или присутствуют лишние корни — снимается 1 балл за каждую из перечисленных ошибок, суммарный штраф не может превосходить 3 баллов.

$\pm$ В решении предполагается, что всегда $2[x] = [2x]$, за каждый потерянный корень снимается 1 балл. При этом за каждую дополнительную арифметическую ошибку снимается 1 балл, суммарный штраф не может превосходить 2 баллов.

$\mp$ Значение $[x]$ ограничено сверху небольшим числом, и тем самым задача сведена к конечному перебору значений $[x]$ и $[2x]$, а дальнейшие продвижения несущественны — 2 балла.

$\mp$ Задача решена методом перебора без обоснования — 2 балла. За каждый неверный корень -1 балл.

2. Вершины правильного 100-угольника раскрашены случайным образом в два цвета: 50 вершин — в белый цвет, 50 — в черный. Докажите, что можно разбить все вершины на 25 групп по 4 вершины так, чтобы в каждой группе было по две вершины каждого цвета, и вершины каждой группы являлись вершинами некоторого прямоугольника.

Будем обозначать черные и белые вершины буквами ч и б соответственно. Рассмотрим 50 пар диаметрально противоположных вершин исходного 100-угольника. Среди этих пар несколько (скажем, n) имеют тип б–б, несколько — ч–ч, и несколько — б–ч. Поскольку черных и белых вершин поровну, то пар ч–ч столько же, сколько пар б–б. Каждую пару ч–ч объединим с некоторой парой б–б, получим n групп по четыре вершины. Оставшиеся $50 - 2n$ пар вершин типа б–ч также объединим по две пары в группу. Каждая из 25 построенных групп содержит по две вершины каждого цвета, и эти четыре вершины располагаются на двух диаметрах описанной окружности исходного многоугольника, то есть являются вершинами прямоугольника. □

Критерии

- $+$ Верное решение — 7 баллов.
- $\pm$ Не доказано, что 2 пары диаметрально противоположных точек образуют прямоугольник — 5 баллов.
- $\pm$ Не доказано, что для каждой пары (б–б, б–ч или ч–ч) можно выбрать другую пару так, что они образуют прямоугольник, для которых выполняется условие — 4 балла.
- $\mp$ Присутствует идея формирования групп по четыре вершины из пар диаметрально противоположных вершин, других существенных продвижений нет — 2 балла.
- $-$ Разбиение на группы построено лишь для конкретной раскраски вершин в два цвета — 0 баллов.

3. Приведите пример натуральных чисел a и b таких, что

$$\frac{a^2+a+1}{b^2+b+1} = 2018^2 + 2018 + 1\,.$$

Для любого числа n можно записать равенство

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)\,. \qquad (*)$$

Но тогда

$$n^2+n+1 = \frac{n^4+n^2+1}{n^2-n+1} = \frac{(n^2)^2+(n^2)+1}{(n-1)^2+(n-1)+1}\,,$$

что и дает требуемый пример: можно положить $a = 2018^2$, $b = 2017$.

Замечание. Аналогичными рассуждениями можно получить иную пару чисел, удовлетворяющих условию: $a = 2019^2$, $b = 2019$. □

Критерии

$+$ Указана подходящая пара чисел a, b — 7 баллов.

$\mp$ Записано тождество (*), дальнейших продвижений нет — 2 балла.

4. У Васи есть калькулятор с двумя кнопками, на экране которого отображается целое число x. Нажатие на первую кнопку заменяет число x на экране на число $[x/2]$, а нажатие на вторую кнопку заменяет число x на число $4x+1$. Вначале на экране калькулятора отображается число 0. Сколько натуральных чисел, не превосходящих числа 2018, можно получить последовательным нажатием кнопок? (Разрешается в процессе получать числа, большие 2018. Через $[y]$ обозначена целая часть числа y, то есть наибольшее целое число, не превосходящее y).

Ответ: 232.

Переведем число на экране калькулятора в двоичную систему счисления. Тогда операции, выполняемые при нажатии кнопок, есть не что иное, как стирание последней цифры числа и дописывание в конец числа комбинации цифр 01. Ясно, что таким образом можно получить любую комбинацию цифр, в которой не встречаются две единицы подряд.

Обозначим через S_k количество не более чем k-значных в двоичной системе чисел, не содержащих двух единиц подряд (для удобства будем дописывать нули в старшие разряды числа, чтобы цифр стало ровно k). Легко видеть, что $S_1 = 2$ (числа 0 и 1), $S_2 = 3$ (числа 00, 01 и 10).

Убедимся, что при всех $k \geqslant 1$ выполнено рекуррентное соотношение $S_{k+2} = S_{k+1} + S_k$. Действительно: все не более чем $(k+2)$-значные числа без двух единиц подряд либо оканчиваются на 0 (таких чисел ровно S_{k+1}), либо оканчиваются на 01 (таких ровно S_k), и значит $S_{k+2} = S_{k+1} + S_k$.

Выясним, сколько чисел, не превосходящих 11-значного числа $2018 = 11\,111\,100\,010_2$, не содержат двух единиц подряд. Заметим, что все 11-значные числа, большие 2018, точно содержат две единицы подряд, и поэтому достаточно посчитать $S_{11} = 233$ (что легко сделать, использовав доказанную выше рекуррентную формулу); после чего нужно откинуть комбинацию из всех нулей, которая не соответствует натуральному числу.

Замечание 1. На самом деле $S_k = F_{k+2}$, где F_k — последовательность Фибоначчи, определенная соотношениями $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$.

Замечание 2. В приведенном выше решении S_k — количество чисел, включая число 0. Если считать количество *натуральных* чисел, рекуррента примет вид $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k + 1$. □

Критерии

- $+$ Верное решение — 7 баллов.
- $+.$ В логически верном решении из-за арифметических ошибок получился другой ответ (неправильно посчитано S_{11}, забыли откинуть нулевую комбинацию) — 6 баллов.
- $\pm$ Доказана рекуррента вида $S_{k+2} = S_{k+1} + S_k$ или эквивалентная, дальнейших продвижений нет — 5 баллов.
- $\mp$ S_k найдены эмпирически, объяснениий нет — 1 балл.
- $-$ Только правильный ответ без каких-либо объяснений — 0 баллов.

5. Последовательность различных клеток $a_1, a_2, \ldots, a_k$ клетчатого квадрата $n \times n$ называется *циклом,* если, во-первых, $k \geqslant 4$ и, во-вторых, клетки a_j и a_{j+1} являются соседними по стороне при всех $j = 1, 2, \ldots, k$ (считаем при этом, что $a_{k+1} = a_1$). Множество X клеток квадрата назовем *разделяющим,* если в любом цикле есть хотя бы одна клетка из множества X. Найдите наименьшее вещественное число C такое, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ в квадрате $n \times n$ существует разделяющее множество из не более чем $C \cdot n^2$ клеток.

Ответ: $C = 1/3$.

Пример. Для построения примера разделяющего множества, в котором не более чем $n^2/3$ клеток, раскрасим все клетки в три цвета по диагоналям (рис. 8): первую диагональ — в первый цвет, вторую — во второй, третью — в третий, четвертую — опять в первый, и так далее. Любой цикл из клеток, как легко видеть, пересекает как минимум три соседних диагонали и, следовательно, содержит клетки всех трех цветов. Клеток одного из цветов будет не более $n^2/3$, и этот цвет можно использовать в качестве разделяющего множества.

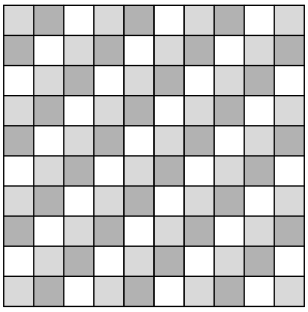

Рис. 8: к решению задачи 5.

Оценка. Покажем, что никакое $C < 1/3$ не подходит. Для этого построим граф, вершинами которого являются клетки. Две клетки соединим ребром, если они являются соседними. Получим граф, в котором n^2 вершин и $2n(n-1)$ ребер, при этом циклы задачи находятся во взаимно однозначном соответствии с циклами в графе. Требуется удалить несколько вершин так, чтобы в оставшемся графе не было циклов.

Предположим, мы удалили $k < C \cdot n^2$ вершин. Если в оставшемся графе нет циклов, то этот граф является объединением деревьев и в нем не более чем $n^2 - k - 1$ ребро. При этом из каждой удаленной вершины выходило не более 4 ребер, и всего было удалено было не более $4k$ ребер. Таким образом, имеем неравенство

$$2n(n-1) - 4k \leqslant n^2 - k - 1\,,$$

откуда $(n-1)^2/3 \leqslant k < C \cdot n^2$, что невозможно при $C < 1/3$ и достаточно большом n. $\square$

Критерии

$+$ Верное решение — 7 баллов.

$\pm$ Доказано, что никакие $C < 1/3$ не подходят (т. е. оценка) — 5 баллов.

$\mp$ Доказано, что $C = 1/3$ подходит (т. е. пример) — 2 балла.

$-$ Правильный ответ без объяснений — 0 баллов.

6. Тетраэдр $ABCD$ с остроугольными гранями вписан в сферу с центром O. Прямая, проходящая через точку O перпендикулярно плоскости ABC, пересекает сферу в точке E такой, что D и E лежат по разные стороны относительно плоскости ABC. Прямая DE пересекает плоскость ABC в точке F, лежащей внутри треугольника ABC. Оказалось, что $\angle ADE = \angle BDE$, $AF \neq BF$ и $\angle AFB = 80°$. Найдите величину $\angle ACB$.

Ответ: $40°$.

Заметим, что точка E равноудалена от точек A, B, C, так ее проекция на плоскость ABC совпадает с проекций точки O на эту плоскость и является центром описанной окружности треугольника ABC.

Рассмотрим треугольники ADE и BDE. Они имеют пару равных сторон AE и BE, общую сторону DE и равные углы ADE и BDE. Из теоремы синусов следует, что эти треугольники либо равны, либо углы DAE и DBE дополняют друг друга до $180°$. Первая ситуация невозможна, так как в случае равенства треугольников ADE и BDE точки A и B равноудалены относительно любой точки на стороне DE, но по условию $AF \neq BF$. Значит, $\angle DAE + \angle DBE = 180°$.

Рассмотрим точку X пересечения луча AF со сферой Ω, описанной около тетраэдра $ABCD$. Заметим, что луч AF лежит в плоскостях ABC и AED, а значит точка X лежит на описанных окружностях треугольников ABC и AED. Точка E равноудалена относительно всех точек описанной окружности треугольника ABC; в частности, $AE = XE$. Из вписанности четырехугольника $AEXD$ следует, что $\angle DAE + \angle DXE = 180°$. Раз $AE = XE$, то E — середина дуги AX описанной окружности треугольника ADE, и значит $\angle ADE = \angle XDE$.

Используя выведенные ранее равенства углов, заключаем, что треугольники DBE и DXE равны по второму признаку: $\angle DBE = 180° - \angle DAE = \angle DXE$, $\angle XDE = \angle ADE = \angle BDE$, сторона DE — общая. Раз треугольники DBE и DXE равны, то вершины B и X равноудалены относительно любой точки на стороне DE; в частности, $BF = FX$.

Осталось посчитать углы в плоскости ABC. Последовательно используя вписанность четырехугольника $ABXC$, равнобедренность треугольника BFX и теорему о внешнем угле для треугольника BFX, пишем

$$\angle ACB = \angle AXB = \frac{1}{2} \cdot (\angle FXB + \angle FBX) = \frac{1}{2} \cdot \angle AFB = 40°\,.$$

Другое решение. Пусть луч AF пересекает сферу Ω, описанную около тетраэдра $ABCD$, в точке X. По построению точки E верно соотношение $EX = EA$, которое влечет за собой равенство $\angle ADE = \angle EAF$. Аналогичными рассуждениями получаем, что $\angle BDE = \angle EBF$, и, следовательно, $\angle EAF = \angle EBF$.

Обозначим точку пересечения прямой OE с плоскостью ABC, являющуюся центром описанной окружности треугольника ABC, через O_1. Тогда $\angle O_1AE = \angle O_1BE$.

Рассмотрим трехгранные углы AO_1EF и BO_1EF. В них совпадают плоские углы EAF и EBF, плоские углы O_1AE и O_1BE и двугранные углы при ребрах AO_1 и BO_1 прямые. Следовательно, соответствующие трехгранные углы равны. А значит равны и плоские углы $\angle FAO_1 = \angle FBO_1$. Отметим, что это равенство можно вывести и из теоремы косинусов для трехгранных углов.

Указанное равенство возможно в двух случаях: либо точка F лежит на серединном перпендикуляре к AB (точки A и B симметричны относительно FO_1), либо точка F лежит на описанной окружности треугольника ABO_1. Первый случай запрещен условием $AF \neq BF$, значит, имеет место второй. Тогда $\angle AOB = \angle AFB = 80°$ и является центральным для угла ACB в описанной окружности треугольника ACB. В результате заключаем, что $\angle ACB = 40°$. □

Критерии

Следующие пункты суммируются.

1. Доказано, что точка E равноудалена от точек A, B и C (+1 балл).
2. Доказано хотя бы одно из двух равенств (или оба) $\angle EAF = \angle EBF$, $\angle DAE + \angle DBE = 180°$ (+1 балл).

3. Доказано равенство $\angle ADE = \angle XDE$ (+1 балл).
4. Доказано равенство треугольников DBE и XDE (+1 балл).
5. Доказано равенство $BF = FX$ (+1 балл).
6. Получен правильный ответ (+2 балла).