10 класс

1. Приведите пример натурального числа n, которое представляется в виде разности квадратов натуральных чисел ровно 2018 способами.

См. решение и критерии задачи 9.1. $\square$

2. Квадратные трехчлены $P(x) = x^2 + \frac{x}{2} + b$ и $Q(x) = x^2 + cx + d$ с вещественными коэффициентами таковы, что $P(x)Q(x) = Q(P(x))$ для всех x. Найдите все вещественные корни уравнения $P(Q(x)) = 0$.

Ответ: $x \in \{-1, \frac{1}{2}\}$.

В уравнении $P(x)Q(x) = Q(P(x))$ раскроем скобки и приравняем коэффициенты при всех степенях. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} c + \dfrac{1}{2} = 1 \\ d + b + \dfrac{c}{2} = \dfrac{1}{4} + 2b + c \\ \dfrac{d}{2} + bc = b + \dfrac{c}{2} \\ bd = bc + b^2 + d \end{cases}$$

единственное решение которой $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$, $d = 0$. Тогда трехчлен $P(x)$ можно представить в виде $P(x) = x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = (x+1)(x-\frac{1}{2})$. Далее, уравнение $P(Q(x)) = 0 = (Q(x)+1)(Q(x)-\frac{1}{2})$ сводится к тому, что либо $Q(x) = -1$, либо $Q(x) = \frac{1}{2}$, первое из которых не имеет решений, а второе имеет два решения $x \in \{-1, \frac{1}{2}\}$.

Другое решение. Заметим, что по теореме Безу многочлен $Q(P(x)) - Q(0)$ делится на многочлен $P(x)$, следовательно, в силу условия, $Q(0)$ делится на $P(x)$ как многочлен, что возможно только если $d = Q(0) = 0$. В этом случае $Q(P(x)) = P(x)(P(x)+c)$, и значит $P(x) + c = Q(x)$, откуда выводим равенства $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$. После нахождения неизвестных коэффициентов решение заканчивается так же, как первое. $\square$

Критерии

- $+$ Верное решение — 7 баллов.
- $\pm$ Верно найдены все коэффициенты a, b, c, но в решении уравнений $P(y) = 0$ или $Q(x) = y$ допущены арифметические ошибки — 5 баллов.
- $\mp$ Верными рассуждениями найдены два из коэффициентов b, c, d — 3 балла.
- $-.$ Верными рассуждениями найден один из коэффициентов b, c, d — 1 балл.

3. Существует ли набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{99}$ такой, что каждое из них равно $\sqrt{2}+1$ или $\sqrt{2}-1$ и выполняется равенство

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{98}x_{99} + x_{99}x_1 = 199?$$

Ответ: нет, не существует.

Предположим противное: пусть такой набор чисел существует. Заметим, что произведение соседних чисел может принимать значения 1 (если они разные), $3+2\sqrt{2}$ (если оба равны $1+\sqrt{2}$) и $3-2\sqrt{2}$ (если оба равны $1-\sqrt{2}$). Обозначим количество пар соседних чисел с произведением $3+2\sqrt{2}$ через m, с произведением $3-2\sqrt{2}$ — через n. Тогда пар соседних чисел чисел с произведением 1 ровно $99 - m - n$. Получаем соотношения

$$(99 - m - n) + m \cdot (3 + 2\sqrt{2}) + n \cdot (3 - 2\sqrt{2}) = 199\,,$$

из которого перегруппировкой слагаемых выводим

$$(m - n) \cdot 2\sqrt{2} = 100 - 2m - 2n\,.$$

В силу иррациональности числа $\sqrt{2}$ последнее соотношение может быть выполнено только при $m = n = 25$. Получается, что ровно 49 пар соседних чисел состояли из разных чисел. Но при расстановке двух типов чисел по кругу количество пар соседних чисел разного типа всегда четно, так как при обходе круга пары типа $(1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$ чередуются с парами типа $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$. Противоречие. $\square$

Критерии

$+$ Полное верное решение — 7 баллов.

$\mp$ Посчитано необходимое число пар каждого типа, но противоречие не получено — 2 балла.

4. Натуральные числа 1, 2, …, 64 записаны в клетках таблицы 8×8 так, что для всех $k = 1, 2, 3, \ldots, 63$ числа k и $k+1$ находятся в соседних по стороне клетках. Каково максимальное значение возможной суммы чисел на главной диагонали?

См. решение и критерии задачи 9.5. $\square$

5. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Точка I_A — центр вневписанной со стороны BC окружности треугольника ABC, а точки K и L — середины отрезков DI_A и EI_A соответственно. Прямые BK и CL пересекаются в точке F, лежащей внутри угла BAC. Найдите $\angle BFC$, если $\angle BAC = 50°$. (*Вневписанная окружность* касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC за точки B и C соответственно.)

Ответ: 130°.

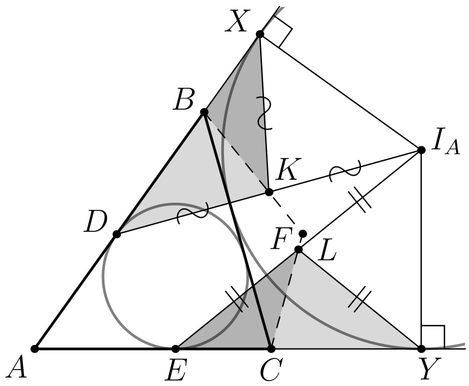

Рис. 7: к решению задачи 5.

Обозначим через X и Y точки касания вневписанной окружности со стороны BC с продолжениями сторон AB и AC соответственно (рис. 7). Прямоугольные треугольники DXI_A и EYI_A симметричны относительно биссектрисы угла A, следовательно, равны и равнобедренные треугольники DKX и YLE. При этом у них на основаниях отмечены точки B и C такие, что $BD = CY = p - b$, где p — полупериметр треугольника ABC, а b — длина стороны AC. В итоге заключаем, что $\angle KBD = \angle LCY$ и, тем самым, четырехугольник $ABFC$ является вписанным. Это приводит к соотношению $\angle BFC = 180° - \angle BAC = 130°$. $\square$

Критерии

$+$ Верное решение — 7 баллов.