Олимпиада «Курчатов»

2016–17 учебный год

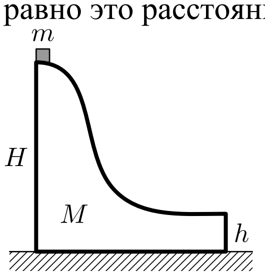
Заключительный этап

11 класс

Задача 1 (5 баллов)

Условие

Небольшая шайба массой m скатывается с вершины гладкой горки массой M и высотой H. Горка находится на гладкой поверхности. На какой высоте h над поверхностью должен находиться нижний горизонтальный участок горки для того, чтобы шайба упала на поверхность на максимальном расстоянии от точки поверхности, над которой произошел отрыв? Чему равно это расстояние, если $m : M = 19 : 81$, а высота горки $H = 1$ м?



Возможное решение

Поскольку все поверхности гладкие, то выполняется закон сохранения энергии.

$$mgH = mgh + m\frac{v^2}{2} + M\frac{u^2}{2},$$

где v – скорость шайбы в момент отрыва, а u – скорость горки.

Из закона сохранения импульса:

$$mv = Mu$$

Рассмотрим полет шайбы после покидания поверхности горки. Поскольку она вылетает горизонтально, то время полета $t_п = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, а дальность полета $L = vt_п = v\sqrt{\frac{2h}{g}}$

Выражая из законов сохранения u и v находим L:

$$u = \frac{m}{M}v$$

$$mgH = mgh + m\frac{v^2}{2} + M\frac{(\frac{m}{M}v)^2}{2} = mgh + m\frac{v^2}{2}(1 + \frac{m}{M})$$

$$v^2 = 2g(H-h)/(1 + \frac{m}{M})$$

$$v = \sqrt{\frac{2Mg(H-h)}{M+m}}$$

$$L = 2\sqrt{h(H-h)\frac{M}{M+m}}$$

Как видно, выражение для L принимает максимальное значение при $h = H/2$.

$$L_{max} = H\sqrt{\frac{M}{M+m}} = 0{,}9H = 0{,}9\ \text{м}.$$

Критерии оценивания

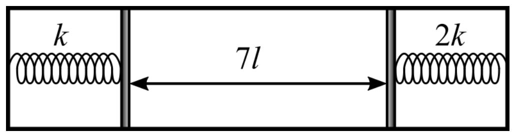
Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Верно записан закон сохранения энергии..1 балл
Верно записан закон сохранения импульса ....1 балл
Найдена дальность полета ....1 балл
Найдена высота нижнего участка горки ....1 балл
Найдена максимальная дальность полета ....1 балл

Задача 2 (5 баллов)

Условие

К боковым стенкам горизонтально расположенного цилиндра с помощью пружин прикреплены два лёгких подвижных поршня, как показано на рисунке. Жёсткость левой пружины равна k, правой – $2k$, пружины подчиняются закону Гука и находятся в вакууме. Между поршнями находится идеальный газ при температуре $T_1 = 350$ К, расстояние между поршнями $7l$, длина каждой из пружин $3l$. После того, как газ нагрели до температуры $T_2 = 600$ К, длина правой пружины уменьшилась до $2l$. Найдите длины пружин в недеформированном состоянии.



Возможное решение

Поскольку жёсткость правой пружины в 2 раза больше, чем левой, а изменения сил давления на оба поршня при нагревании газа одинаковы, сжатие левой пружины должно быть в два раза больше, то есть составит $2l$. Поэтому после нагревания расстояние между поршнями будет равно $10l$. Пусть p_1, V_1 — начальные давление и объём газа, а p_2, V_2 — конечные. Как следует из уравнения состояния идеального газа:

$$\frac{p_2V_2}{p_1V_1} = \frac{T_2}{T_1}, \text{откуда} \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}\frac{V_1}{V_2} = \frac{600}{350} \cdot \frac{7l}{10l} = \frac{6}{5} = 1{,}2.$$

Значит, давление в результате нагревания увеличилось на 20%, из чего следует, что и деформация пружин увеличилась на 20%. Получается, что начальная деформация левой пружины равна $10l$, а правой — $5l$. Длина левой пружины в недеформированном состоянии $13l$, а правой — $8l$.

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что уменьшение длины левой пружины равно $2l$ ....1 балл
Найдено расстояние между поршнями после нагревания...1 балл
Правильно использовано уравнение состояния идеального газа ....1 балл
Получен ответ ....2 балла

Задача 3 (5 баллов)

Условие

Электронагреватель с сопротивлением 90 Ом помещён в баллон, в котором находится одноатомный идеальный газ под давлением $3 \cdot 10^5$ Па. Электронагреватель на 5 минут подключают к источнику постоянного напряжения с ЭДС 100 В и внутренним сопротивлением 10 Ом, после чего давление в баллоне становится равным $6 \cdot 10^5$ Па. Определите объём баллона. Газ не обменивается теплотой с окружающей средой.

Возможное решение

Сила тока, текущего через нагреватель, равна

$$\frac{100\ \text{В}}{90\ \text{Ом} + 10\ \text{Ом}} = 1\ \text{А}.$$

Количество теплоты, выделившейся в нагревателе:

$$\square Q = (1\ \text{А})^2 \cdot 90\ \text{Ом} \cdot 300\ \text{с} = 27\ \text{кДж}.$$

Поскольку газ не обменивается теплотой с окружающей средой и его объём постоянен (и равен объёму баллона), вся выделившаяся в нагревателе теплота пошла на увеличение внутренней энергии газа. Пусть V – объём баллона, а $\Delta p = 3 \cdot 10^5$ Па – изменение давления газа в баллоне, тогда

$$27\ \text{кДж} = \frac{3}{2}\Delta p V \Longrightarrow V = \frac{18000\ \text{Дж}}{3 \cdot 10^5\ \text{Па}} = 6 \cdot 10^{-2}\ \text{м}^3 = 60\ \text{л}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Найдена сила тока, текущего через нагреватель, или напряжение на нём .... 1 балл
Применен закон Джоуля-Ленца .... 1 балл
Применено выражение для внутренней энергии идеального одноатомного газа.............. 1 балл
Получен ответ .... 2 балла

Задача 4 (5 баллов)

Условие

Три одинаковых маленьких шарика, каждый из которых имеет массу m и несёт заряд q, удерживают в вершинах правильного треугольника с длиной стороны a. В некоторый момент все шарики отпускают, сообщая каждому скорость v, направленную к центру треугольника. Какой путь пройдёт каждый из шариков к тому моменту, когда его скорость станет равной нулю?

Возможное решение

Поскольку все шарики находятся в одинаковых условиях, они и двигаться будут одинаково: вдоль прямых, соединяющих их начальные положения с центром треугольника, причём в любой момент времени между всеми шариками будут одинаковые расстояния. Значит, и скорости шариков обратятся в ноль одновременно. Пусть в этот момент расстояния между шариками равны b. Запишем закон сохранения энергии:

$$3\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{mv^2}{2}\right)=3\,\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 b}\Longrightarrow a-b=\frac{2\pi\varepsilon_0 mv^2a^2}{q^2+2\pi\varepsilon_0 mv^2a}.$$

Расстояние от вершины до центра в правильном треугольнике со стороной a равно $a/\sqrt{3}$, значит, искомый путь каждого из шариков равен:

$$s=\frac{2\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 mv^2a^2}{3(q^2+2\pi\varepsilon_0 mv^2a)}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

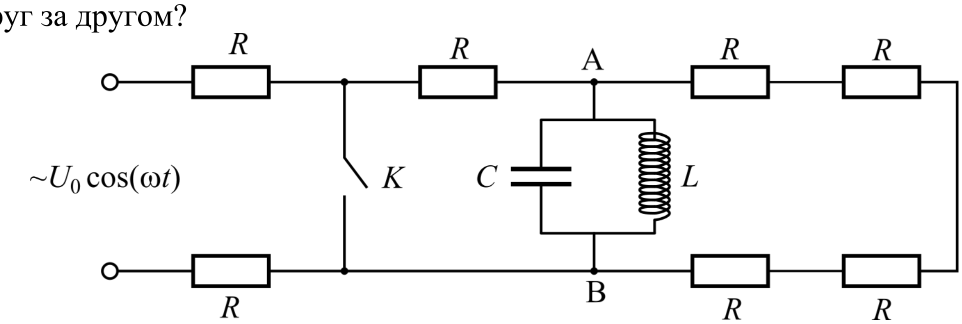
Указано, что заряды движутся одинаковым образом ....1 балл
Правильно применен закон сохранения энергии ....2 балла
Получен правильный ответ ....2 балла

Задача 5 (10 баллов)

Условие

В электрической цепи, схема которой показана на рисунке, все резисторы одинаковые, и сопротивление каждого из них равно R. Цепь очень давно подключена к источнику переменного напряжения $U(t) = U_0\cos\omega t$. Ёмкость C конденсатора и индуктивность L катушки подобраны таким образом, что выполняется соотношение: $\omega L = 1/(\omega C)$.

1) Найдите максимальное напряжение на конденсаторе.
2) Найдите максимальную силу тока, протекающего через катушку.
3) Ключ K замыкают в момент, когда ток через катушку не течёт. Найдите количество теплоты, которое выделится в каждом из резисторов, расположенных на рисунке справа от ключа K, после его замыкания.
4) Как изменятся ответы для количеств теплоты, выделившихся в тех же резисторах, если ключ размыкают в момент, когда ток через катушку максимален?
5) Как изменятся ответы на вопросы 1), 2), 3) и 4), если катушка и конденсатор будут подключены к тем же точкам A и B не параллельно друг другу, а последовательно друг за другом?



Возможное решение

Поскольку в условии сказано, что цепь была подключена к источнику переменного напряжения давно, то это означает, что все переходные процессы в такой цепи давно прекратились. Для переменного тока параллельно соединенные конденсатор и катушка с выбранными значениями параметров C и L представляют собой бесконечно большое сопротивление (в любой момент времени сумма сил токов, текущих через конденсатор и катушку равна нулю, поскольку импедансы этих элементов цепи одинаковы, а токи через них текут в противофазе). Поэтому до замыкания ключа ток во всех семи резисторах одинаковый и равен $I(t) = U_0\cos(\omega t)/(7R)$. Напряжение на конденсаторе и на катушке в любой момент времени также одинаковое, оно равно $4U_0\cos(\omega t)/7$. Амплитуда этого переменного напряжения и есть максимальное напряжение на конденсаторе, то есть $U_{C\max} = 4U_0/7$.
Амплитуда тока, текущего через катушку, равна

$$I_{L\max} = 4U_0/(7\omega L) = 4\omega CU_0/7, \text{ или } I_{L\max} = \frac{4U_0}{7}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Как уже говорилось, равные по модулю токи текут через конденсатор и через катушку в противофазе, в результате чего ток, протекающий по проводникам, соединяющим L-C контур с узлами A и B, равен нулю. В колебательном контуре запасена электрическая энергия, равная $C\times U^2_{C\max}/2$, или $L\times I^2_{L\max}/2$, или $8C(U_0)^2/49$, которая после замыкания ключа превратится в теплоту, выделившуюся в резисторах, расположенных справа от ключа.

Она распределится между пятью резисторами, которые находятся правее ключа. Из этой энергии 4/5 доли выделится в резисторе, расположенном между ключом и конденсатором, то есть $W_1 = 32CU_0^2/245$. В каждом из четырех оставшихся резисторов выделится четвертая часть от 1/5 доли энергии конденсатора, то есть 1/20 часть от упомянутой энергии: $W_2 = 2CU_0^2/245$.

От момента замыкания ключа теплота, выделившаяся в каждом из пяти резисторов, никак не зависит.

Если конденсатор и катушка будут подключены не параллельно, а последовательно друг за другом, то в этом случае для переменного тока такой колебательный контур представляет собой «короткое замыкание», то есть сопротивление на участке A – B равно нулю. В этом случае максимальный ток через катушку (и через конденсатор тоже) равен $U_0/(3R)$. Максимальная амплитуда напряжения на конденсаторе равна

$$U_{C\max} = U_0/(3R\omega C) = \omega L U_0/(3R), \text{ или } U_{C\max} = \frac{U_0}{3R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

В колебательном контуре до замыкания ключа была запасена энергия: $LU_0^2/(18R^2)$.

Эта энергия после замыкания ключа превратится в теплоту, которая выделится в тех же пяти резисторах, расположенных на рисунке справа от ключа, в такой же пропорции, как и для параллельного соединения конденсатора и катушки. То есть в резисторе, расположенном на рисунке между ключом и колебательным контуром, выделится 4/5 от запасенной в контуре энергии, то есть: $2LU_0^2/(45R^2)$, а в каждом из оставшихся четырех резисторов выделится по 1/20 от запаса энергии в контуре, то есть по $LU_0^2/(360R^2)$.

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 10 баллов независимо от выбранного участником метода.

Найдено максимальное значение напряжения на конденсаторе в первом случае.............1 балл
Найдена максимальная сила тока через катушку в первом случае ....1 балл
Даны правильные ответы на пункт 3 задачи ....2 балла
Даны правильные ответы на пункт 4 задачи, либо указано, что они такие же, как и в третьем пункте ....1 балл
Найдено максимальное значение напряжения на конденсаторе во втором случае...........1 балл
Найдена максимальная сила тока через катушку во втором случае ....1 балл
Найдены количества теплоты, выделившиеся в резисторах после замыкания ключа в случае последовательного соединения конденсатора и катушки ....2 балла
Указано, что количества теплоты не зависят от момента замыкания ключа, либо подсчитаны для двух случаев и получены одинаковые значения ....1 балл

Задача 6 (5 баллов)

Условие

С помощью тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием 20 см получили на экране увеличенное в 4 раза чёткое изображение предмета. Затем, не меняя положения линзы, экран придвинули на 40 см к линзе и переместили предмет так, чтобы на экране вновь получилось чёткое изображение предмета. Найдите новое расстояние от предмета до линзы. Какое увеличение получилось во втором случае?

Возможное решение

Пусть b — начальное расстояние от экрана до линзы, тогда начальное расстояние от предмета до линзы равно $b/4$ (использована формула для увеличения, даваемого линзой). По формуле тонкой линзы:

$$\frac{4}{b} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Longrightarrow b = 5F = 100 \text{ см}.$$

Значит, новое расстояние от линзы до экрана $100 \text{ см} - 40 \text{ см} = 60 \text{ см}$. Запишем формулу тонкой линзы во втором случае, обозначив расстояние от предмета до линзы за x:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{60 \text{ см}} = \frac{1}{20 \text{ см}} \Longrightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{60 \text{ см}} \Longrightarrow x = 30 \text{ см}.$$

Теперь линза даёт изображение, увеличенное в $(60 \text{ см})/(30 \text{ см}) = 2$ раза.

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Записана формула для увеличения ....1 балл
Записана формула тонкой линзы ....1 балл
Правильно найдено новое расстояние от предмета до линзы..2 балла
Правильно найдено новое увеличение ....1 балл