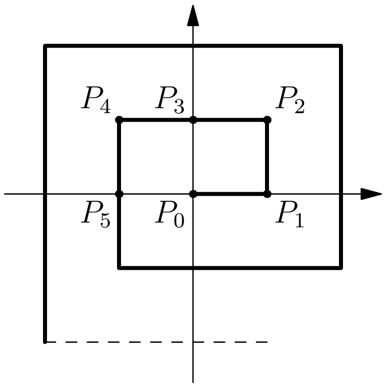
Олимпиада «Курчатов» — 2017 по математике

9 класс, 19 марта 2017 г.

\+ Полное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.

9 класс

1. Муравей Боря двигается по координатной плоскости, стартуя из точки $P_0 = (0,0)$, двигаясь к точке $P_1 = (1,0)$, и далее по спирали против часовой стрелки (рис.).



Точки с целочисленными координатами, в которые он попадает, образуют последовательность P_n. Найдите координаты точки P_{1557}.

Ответ: $(20,17)$. Рассмотрим точки, которые являются правыми нижними и левыми верхними углами ломаной, то есть точки вида $(k, 1-k)$ и $(-k,k)$. Легко видеть, что это точки P_1, P_4, P_9, и т. д. Действительно, расстояние от точки $(k,1-k)$ до $(-k,k)$ по ломаной составляет $4k-1$, что есть разность между $(2k)^2$ и $(2k-1)^2$. Аналогично, расстояние от $(-k,k)$ до $(k+1,-k)$ равно $4k+1$, что есть разность между $(2k+1)^2$ и $(2k)^2$. По индукции получаем, что $P_{(2k-1)^2} = (k, 1-k)$ и $P_{(2k)^2} = (-k,k)$.

Заметим, что $(2\cdot 20-1)^2 = 1521$. Значит, точка P_{1521} имеет координаты $(20,-19)$. Точка P_{1557} на 36 выше ее, то есть имеет координаты $(20,17)$. $\square$

$\pm$ Правильное рассуждение с арифметической ошибкой, приводящей к неправильному ответу. 4-5 баллов

$\mp$ Правильный ответ без объяснения. 1 балл

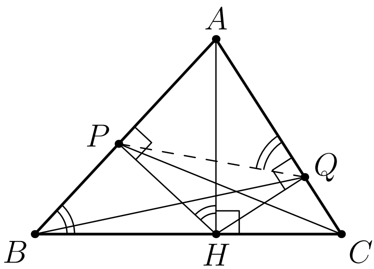
2. В популярной интеллектуальной игре «Столкновение умов» принимает участие 10 человек. К концу игры каждый игрок набирает целое число очков. Оказалось, что в полуфинале все количества набранных игроками очков имеют разные последние цифры. Докажите, что в финале игры, где игроки суммарно наберут вдвое больше очков, чем в полуфинале, такой ситуации произойти не может.

Предположим противное — по итогам финала игроки набрали такие количества очков, что их последние цифры различны, то есть равны 0, 1, 2, ..., 9 в некотором порядке. Тогда последняя цифра суммы всех очков совпадает с последней цифрой суммы $0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$. С другой стороны, по условию эта сумма — число четное. Противоречие. $\square$

−. В решении присутствует идея вычисления последней цифры суммы без дальнейших продвижений. 2 балла

− Задача решена в предположении, что каждый участник в финале наберет вдвое больше очков, чем в полуфинале. 0 баллов

3. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH. Пусть P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки H на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что $\angle BQH = \angle CPH$.



Так как точки P и Q лежат на окружности, построенной на AH как на диаметре, равны углы $\angle PQA = \angle PHA$ как вписанные. С другой стороны, углы $\angle PHA$ и $\angle HBA$ равны, так как они оба дополняют угол BAH до прямого. Углы $\angle AQP$ и $\angle ABC$ равны, а значит, четырехугольник $BPQC$ можно вписать в окружность. Тогда равны и углы $\angle BPC$ и $\angle BQC$ как вписанные. Искомое равенство получается, если из каждого из них вычесть $90°$. $\square$

∓ Доказана вписанность четырехугольника $BPQC$, но решение не закончено. 3 балла

−. Доказана вписанность четырехугольника $APHQ$. 1 балл

4. Найдите все пары натуральных чисел x и y, таких что отношение $\frac{xy^3}{x+y}$ является простым числом.

Ответ: $x = 14$, $y = 2$.

Пусть $xy^3 = p(x + y)$, где p — простое число. Это означает, что одно из чисел x и y делится на p. Разберем оба случая.

Предположим для начала, что $y = mp$. Тогда $xm^3p^2 = x + mp$. Но, поскольку $p \geqslant 2$, мы можем написать цепочку неравенств $xm^3p^2 \geqslant 2xm^3p \geqslant$

$xp + mp > x + mp$.

Перейдем к случаю $x = kp$. После преобразований получаем равенство $k(y^3 - p) = y$. Если $y^3 - p \vdots d$ для какого-то натурального числа d, то $y \vdots d$ и, следовательно, $p \vdots d$, то есть $d = 1$ или $d = p$. В качестве d можно взять само число $y^3 - p$. Получаем, что либо $y^3 - p = p$, что, очевидно, невозможно, так как в y^3 все простые сомножители входят хотя бы в третьей степени; либо $y^3 - p = 1$. В последнем случае получаем, что $p = (y-1)(y^2 + y + 1)$ и в силу простоты p необходимо $y = 2$. Тогда $p = 7$ и $x = 14$. $\square$

$\pm$ Ход решения в целом верный, но ответ потерян. 5 баллов

$\pm$ Разобран случай $x \vdots p$. 4 балла

$\underset{\bullet}{-}$ Разобран случай $y \vdots p$. 2 балла

5. В конкурсе по физике участвуют 17 школьников. Участникам конкурса было предложено 12 задач. В результате каждую задачу правильно решили больше половины участников. Докажите, что обязательно найдутся три школьника, в объединении решившие все задачи.

Оценим количество троек школьников, не справившихся с первой задачей. Эту задачу не смогли решить 8 школьников или меньше, а значит число таких троек не превосходит $8 \cdot 7 \cdot 6/6 = 56$. Раз задач всего 12, то число троек школьников, не осиливших какую-то задачу, не превосходит $12 \times 56 = 672$. С другой стороны, всего существует $17 \cdot 16 \cdot 15/6 = 680$ троек школьников, что больше. Значит, найдутся три школьника, решивших в объединении все задачи. $\square$

$\mp$ В решении присутствует идея подсчета числа троек участников, не решивших конкретную задачу. Не менее 3 баллов

$-$ Разобраны нескольких частных случаев. 0 баллов