Олимпиада «Курчатов» — 2017 по математике
8 класс, 19 марта 2017 г.

$+$ Полное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.

8 класс

1. Автобусы из Москвы в Воронеж выходят каждый час, в 00 минут. Автобусы из Воронежа в Москву выходят каждый час, в 30 минут. Поездка между городами занимает 8 часов. Сколько автобусов из Воронежа встретит автобус, вышедший из Москвы, на своем пути?

Ответ: 16.

Ясно, что все автобусы из Москвы встретят одинаковое число автобусов из Воронежа, и можно считать, что в автобус из Москвы отправился в 12:00. Легко понять, что он встретится с автобусами, выехавшими из Орла в 4:30, 5:30, ..., 18:30, 19:30 и только с ними. Таких автобусов 16. □

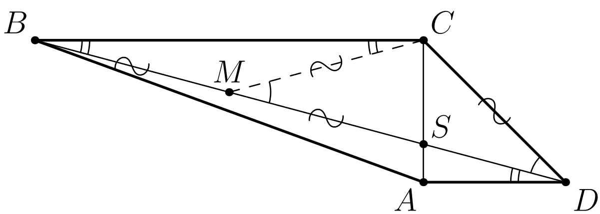
$\pm$ Правильное рассуждение с арифметической ошибкой, приводящее к неправильному ответу. 4-5 баллов

$\mp$ Вычислена частота встреч (раз в полчаса), но ответ неправильный. 3 балла

$-\!\!\!\cdot$ Правильный ответ без объяснения. 1 балл

2. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке S. Известно, что $AD \perp AC$ и $BS = 2CD$. Докажите, что $\angle CDB = 2\angle ADB$.

Отметим точку M — середину отрезка BS (рис.).



Так как треугольник BCS прямоугольный, медиана CM равна половине гипотенузы BS, то есть равна CD. Получается, что треугольник MCD равнобедренный; отсюда $\angle CDM = \angle CMD$. В равнобедренном треугольнике BCM углы $\angle MBC$ и $\angle MCB$ равны, и равны половине внешнего угла $\angle CMD$. Кроме того, углы $\angle CBM$ и $\angle ADB$ равны как накрест лежащие. Это завершает цепочку равенств

$$\angle CDM = \angle CMD = 2\angle CBM = 2\angle BDA\,.$$ □

$+\!\!\!\cdot$ Правильное рассуждение имеет несколько случаев, но разобран лишь один. 6 баллов

$\mp$ Построена медиана треугольника BCS, но задача не решена. 2 балла

3. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение
$$(2x+y)(2y+x) = 2017^{2017}\,?$$

Ответ: 0.

Заметим, что сумма чисел $A = 2x + y$ и $B = 2y + x$ делится на 3. Так как число в правой части не кратно 3, то ни A, ни B также не кратны 3. Следовательно, одно из этих двух чисел дает остаток 2 при делении на 3, а другое дает остаток 1. Но тогда их произведение дает остаток 2. Однако, число 2017 дает остаток 1, а значит и 2017^{2017} тоже. □

$\pm$ Установлено, что системы уравнений не получается решить в целых числах из-за делимости на 3, но отсутствует строгое обоснование, почему так будет происходить для всех случаев. 5 баллов

$\mp$ В решении разобрано несколько различных разложений на множители, для каждого из которых установлено, что соответствующая система уравнений не имеет решений. 3 балла

$\underset{\bullet}{-}$ Правильный ответ без обоснования. 1 балл

4. Учительница дала Васе и Пете два одинаковых картонных n-угольника. Вася разрезал свой многоугольник по непересекающимся диагоналям на 33-угольники, а Петя разрезал свой многоугольник по непересекающимся диагоналям на 67-угольники. Найдите наименьшее возможное значение n.

Ответ: 2017.

Сумма углов n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$. Если он разрезан на k 33-угольников, то $(n-2)\cdot 180° = k\cdot(33-2)\cdot 180°$, следовательно, $n-2 \vdots 31$. Аналогично из второго условия следует, что $n-2 \vdots 65$. Поскольку 31 и 65 взаимно просты, наименьшее возможное значение $n = 31\cdot 65+2 = 2017$. □

$\pm$ Правильное решение с незначительной ошибкой, приводящей к неправильному ответу. 5 баллов

$\underset{\bullet}{-}$ В решении есть идея подсчета суммы углов, но нет выводов о делимости. 2 балла

$\underset{\bullet}{-}$ Дан правильный ответ, но не обоснован. В частности, приведена некоторая пара разрезаний для которых «все сходится». 1 балл

5. В математическом конкурсе участвуют 14 школьников. Участникам конкурса было предложено 6 задач. В результате каждую задачу правильно решили больше половины школьников. Докажите, что обязательно найдется пара участников, которые в объединении правильно решили все задачи.

Представим школьников как точки, и будем соединять их линиями одного из шести цветов. А именно, двух школьников будем соединять линией цвета 1, если *они оба не решили задачу 1.* Аналогично, линии цвета 2 будем проводить между школьниками, которые не решили задачу 2, и т. д. (Между некоторыми школьниками может получиться несколько линий.) Заметим, что для каждой задачи не более 6 школьников её не решило. Это означает, что линий соответствующего цвета не более $6 \cdot 5/2 = 15$. Значит, всего линий всех цветов не более $6 \cdot 15 = 90$.

С другой стороны, пар школьников больше, $14 \cdot 13/2 = 91$. Следовательно, между какими-то двумя школьниками не проведено ни одной линии. Это означает, что любую задачу хотя бы один из этой пары решил. □

∓ Присутствие в решении идеи подсчета числа пар участников, не решивших конкретную задачу. Не менее 3 баллов

− Разобраны нескольких частных случаев. 0 баллов